CONNAISSANCE ET UTILISATION DES MATHÉMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT : CLARIFICATIONS CONCEPTUELLES ET ÉPISTÉMOLOGIQUES

NADINE BEDNARZ, JÉRÔME PROULX [1]

Le mouvement de recherches portant sur les *connaissances mathématiques pour l'enseignement* [2] a pris au cours des dernières années de l'ampleur dans la communauté scientifique internationale (Adler et Davis, 2006; Ball et Bass, 2003; Ball, Lubiensky et Mewborn, 2001; Davis et Simmt, 2006; Margolinas, Coulanges et Bessot, 2005). Ces recherches s'appuient sur un corpus de données empiriques et des réflexions théoriques sur les connaissances mathématiques des enseignants qui ouvrent la voix – et ce mouvement est en ce sens important – à de nouvelles façons de penser la formation *mathématique* des enseignants. Ces travaux contribuent en effet à interroger les structures en place à la formation des enseignants et à convaincre de la nécessité d'un changement de cap important vis-à-vis celle-ci. Ils sont à la base d'une re-conceptualisation de la composante mathématique de cette formation, à l'opposé de celle caractérisant encore aujourd'hui plusieurs programmes de formation dans le monde, dans lesquels l'accent est mis sur des cours de mathématiques académiques très loin de la pratique mathématique en classe des enseignants (voir, par exemple, Moreira et David, 2008; Proulx et Bednarz, 2008).

Ceci dit, en tant que francophones œuvrant dans le milieu de la didactique des mathématiques au Québec (Canada) [3], nous devons avouer avoir été surpris au départ par l'avènement et l'engouement que ce mouvement, initié entre autres par D. Ball et H. Bass, a provoqué dans la communauté scientifique. Nous avions l'impression que ce discours était déjà présent depuis de nombreuses années dans les milieux francophones, tout au moins au Québec, autour des développements ayant eu cours en formation des enseignants (voir, entres autres, Bednarz, 2001; Bednarz, Gattuso et Mary, 1995; Bednarz et Perrin-Glorian, 2003; Bednarz et Proulx, 2005; Janvier, 1996; Janvier et Hosson, 1999). Toutefois, il faut reconnaître que cette formation, et ses principes sous-jacents, *n'ont jamais vraiment été* théorisés aussi finement et de façon aussi convaincante que ne l'ont fait les artisans du mouvement sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ces dernières années. [4]

Nous croyons donc qu'il y a là une occasion pour nous d'expliciter davantage cette conceptualisation, en précisant ce que nous entendons par « connaître et utiliser les mathématiques dans l'enseignement ». Nous souhaitons ainsi ajouter notre contribution à la réflexion contemporaine sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement et stimuler les discussions autour de cet enjeu important de la formation des enseignants.

Pour aborder cette conceptualisation, nous enracinerons notre discours dans la pratique des enseignants en mathématiques. Des vignettes issues d'une recherche collaborative menée avec un enseignant du secondaire serviront d'illustrations à nos propos. Notre théorisation est en effet issue de recherches collaboratives menées depuis plusieurs années avec des enseignants (voir, entre autres, Bednarz, Poirier, Desgagné, et Couture, 2001; Bednarz, Desgagné, Diallo, et Poirier, 2001; Bednarz, 2004), qui permettent de mieux comprendre les connaissances développées par les enseignants en pratique, connaissances qu'ils mettent à contribution dans l'élaboration et la réalisation de situations d'enseignement/apprentissage en mathématiques. Cette théorisation s'inspire aussi d'une réflexion a posteriori sur les interventions élaborées dans le programme de formation des enseignants de mathématiques au secondaire développé depuis les années 1970 à l'*Université du Québec à Montréal,* dont le but est de former des professionnels de l'intervention en enseignement des mathématiques. Nous formulerons donc des propos qui joueront sur deux axes complémentaires: une théorisation de ce que nous entendons par « connaissances mobilisées dans l'enseignement des mathématiques » enracinée dans la pratique d'enseignement *et* une illustration et discussion autour des moyens que nous mettons en place pour les faire développer.

Des illustrations

Les données que nous reprenons ici sont tirées d'une recherche collaborative portant sur l'élaboration de situations d'enseignement en mathématiques (explorant l'apport de problèmes de dénombrement) et visant le développement du processus de modélisation chez des élèves de 12-13 ans du début du secondaire (Barry, 2008). Pour offrir des illustrations de nos propos, nous empruntons ici des exemples d'extraits significatifs tirés de rencontres entre enseignant et chercheur ou de récits d'expérimentation en classe (des traces sur ce qui s'est passé), qui viennent illustrer des éléments importants à la base de notre conceptualisation. Dans un premier temps, nous discuterons des aspects qui concernent les intentions variées mises de l'avant par l'enseignant dans son choix d'activités exploitées en classe, pour ensuite décrire et analyser des événements réels s'étant produits en classe. Ces deux angles serviront à clarifier notre conceptualisation de ce que sont les connaissances mobilisées dans l'enseignement des mathématiques.

Des intentions imbriquées mathématiques, didactiques et pédagogiques [5]

Dans cet extrait provenant du verbatim d'une rencontre réflexive entre le chercheur et l'enseignant (que nous nommerons Roy) au sujet de l'enseignement réalisé dans ses classes, l'enseignant fait allusion à une activité qu'il a proposée de type « casse-tête » à faire en équipes de six (un casse-tête formé de 6 pièces à agrandir à 125%).

L'explication offerte par l'enseignant au sujet de l'intérêt que présente pour lui cette activité, qu'il essaie pour la première fois avec ses élèves, nous permet d'entrer dans les critères qui guident son choix :

- « Les élèves sont obligés de communiquer, de s'accorder sur une stratégie afin que les différents bouts (morceaux du casse-tête) puissent correspondre ». [6] Roy entre ici sur une analyse didactique de la tâche donnée aux élèves: selon lui, celle-ci force la recherche d'une stratégie commune par les élèves, elle force aussi l'explicitation (entre eux) de leur démarche et de leurs arguments.

- « Cela permet aux élèves de travailler ensemble, de coopérer, ou pour employer la terminologie du nouveau programme de formation de l'école québécoise, de développer des compétences d'ordre personnel et social, soit "coopérer, actualiser son potentiel" ». D'autres composantes sont ici énoncées par Roy, mettant en évidence une entrée sur la dimension institutionnelle à travers le programme, ainsi qu'une intention pédagogique à travers l'importance qu'il accorde à la coopération entre les élèves.

- Une entrée mathématique apparaît également (de manière implicite) : à travers (1) le choix du facteur d'agrandissement retenu par l'enseignant [un pourcentage], (2) le raisonnement proportionnel mobilisé dans cette activité et (3) le choix de registres sur lesquels doit travailler l'élève [registre géométrique par les formes à agrandir, registre numérique par le facteur d'agrandissement].

Le choix de problèmes et d'activités à proposer aux élèves est un des éléments clé de la pratique d'un enseignant. Il est en effet au cœur de sa planification quotidienne d'enseignement. Sur quelle base l'enseignant fait-il cette sélection? L'analyse précédente fait bien ressortir une multiplicité de critères au cœur de ce choix ainsi que leur caractère simultané et imbriqué : une dimension institutionnelle (en référence au programme), une dimension didactique (dans l'analyse de l'activité et de son intérêt, de ce qu'elle force chez les élèves, de ce qu'elle va chercher), une dimension mathématique (à travers les raisonnements et propriétés clés qu'elle travaille, les registres de représentation), une dimension pédagogique (dans la visée « apprendre à fonctionner », à coopérer avec les autres, à travailler ensemble). On voit, dans cet exemple, comment l'enseignant table simultanément sur diverses composantes dans son choix de l'activité, montrant ici les compréhensions variées, mais imbriquées, qu'il met de l'avant.

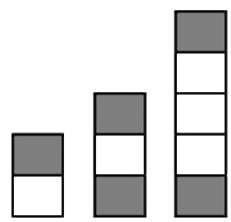
À propos de l'exploitation d'activités en classe : connaissances mobilisées en action

Les données reprises ci-dessous sont issues de trois séances d'enseignement, provenant d'une séquence qui a été vécue avec deux groupes différents d'élèves (permettant de voir l'adaptation que l'enseignant opère *in situ,* des ajustements divers étant faits dans l'action). Pour fins d'analyse, elles ont été regroupées en différents épisodes.

Épisode 1. Résolution de problèmes par les élèves en équipe

Le problème suivant a été donné aux élèves :

> En équipe, trouvez toutes les tours d'une certaine hauteur que l'on peut faire avec des blocs de deux couleurs, blancs et rouges [des blocs en nombre limité sont donnés aux élèves pour permettre une visualisation du problème], sachant que deux blocs de même couleur, rouges par exemple, ne peuvent être placés côte à côte.



- Combien de tours différentes de hauteur 5 blocs de hauteur est-il possible ainsi de construire?
- Combien de tours différentes de hauteur 6 blocs de hauteur est-il possible de construire?
- Si on reprenait cette activité avec une autre classe, sans avoir à recompter à chaque fois, est-il possible de trouver une manière de faire qui permettrait de calculer le nombre de tours différentes que l'on peut faire, et qui marcherait pour n'importe quelle hauteur de tour? Expliquez.

Nous reprenons ci-dessous la trace de ce qui s'est passé dans chacun des groupes d'élèves

Dans le groupe A : Les élèves commencent à travailler sur le problème et de nombreuses questions surgissent rapidement de la part des élèves.

1. Des questions concernant la consigne. Roy *est amené à revenir sur celle-ci :* ne pas mettre côte à côte des blocs d'une couleur donnée dans les tours *(il laisse toutefois la latitude aux élèves de prendre en main la résolution et ne fait que re-préciser une des contraintes du problème).*

2. Plusieurs questions des élèves portent sur une symétrie des tours. À certains qui demandent si la tour BBBBR est la même chose que celle obtenue à l'envers (RBBBB), Roy *suggère d'imaginer une vraie tour, avec des étages peints en rouge et blanc.* Il demande : « Obtient-on la même tour en colorant différemment les niveaux ? » et ajoute : « Si tu dis oui, pourquoi? Et si tu dis non, pourquoi? »

3. Une question sur la possibilité d'avoir des tours d'une seule couleur. Roy *demande alors si avec de telles tours ils respectent la condition que des blocs d'une certaine couleur ne peuvent être côte à côte.*

Dans le groupe B : les élèves se mettent vite au travail et des stratégies différentes émergent.

En circulant entre les tables, Roy *s'aperçoit que la 3ème question de ce problème est difficile pour les élèves. Il décide de leur demander,* au lieu de regarder les tours de hauteur plus grande que 6, de considérer les tours de hauteur plus petite (qu'on peut former avec 1, 2, 3 et 4 blocs). [*Au vu de ce qu'ils ont fait avec le cas 6, il dira au chercheur « vaut mieux les faire travailler sur des cas plus petits et espérer ainsi les amener à trouver la régularité ».]

Quelques élèves semblent apprécier positivement l'idée de travailler avec des tours plus petites. Des équipes commencent à formuler une régularité qui donnerait le nombre de tours et ce quelque soit la hauteur.

On voit ici apparaître chez l'enseignant, dans les passages que nous avons placés en italique, ce que Mason et Spence (1999) appellent *knowing-to act in the moment,* c'est-à-dire un savoir-agir qui se construit et se déploie dans l'action, sur-le-champ, dans la classe là où l'enseignant compose avec des groupes d'élèves différents et, surtout, s'adapte à des entrées différentes des élèves dans la situation. L'enseignant invente ici des réponses, enracinées dans l'action, en réaction à ce qui se passe; il n'arrive nullement avec des interventions qui ont été programmées d'avance (on le voit bien en contrastant ce qui se passe dans les deux groupes).

Quelles sont ces connaissances en acte mobilisées par l'enseignant, pas nécessairement explicites, qui sont construites en contexte en réponse à l'engagement des élèves?

- *Ces connaissances en acte réfèrent à une certaine « grille de lecture » implicite* (de ce qui se passe chez les élèves) *mobilisée dans l'action.* Celle-ci guide en effet Roy, implicitement, dans la différentiation des éléments auxquels il peut répondre de ceux que l'élève doit prendre en charge (lorsqu'il revient sur la consigne, dans le groupe A). Cette grille de lecture représente en quelque sorte ses balises pour répondre, c'est-à-dire ce qu'il peut dire et ce qu'il ne peut pas dire. Une grille de lecture est aussi à l'oeuvre lorsqu'il perçoit les difficultés des élèves (dans le groupe B, sur la troisième question) et cherche à donner du sens à celles-ci. Cette grille est construite dans l'action en réponse aux questions et productions d'élèves, à leurs difficultés et façons d'entrer dans le problème.
- *Ces connaissances en acte renvoient aussi à des manières de faire.* Par exemple, Roy *suggère ici une visualisation possible* pouvant servir d'appui à la résolution (en réponse à la question sur la symétrie des tours, dans le groupe A); *un retour à des nombres plus petits* pour faciliter le passage à la généralisation (dans le groupe B); et *il ramène* (pour contredire la possibilité d'avoir des tours d'une seule couleur) *à l'élément central des contraintes à prendre en compte* (dans le groupe A).
- *Elles sont aussi de l'ordre d'éléments auxquels l'enseignant tient dans son enseignement.* On le voit par exemple quand Roy sollicite, à travers ses questions, une constante justification de la part des élèves (voir le point 2, dans le groupe A). De façon implicite, ceci communique aussi aux élèves sa propre vision des mathématiques et des façons de faire les mathématiques (Bauersfeld, 1994), axées dans ce cas sur leur justification.

Épisode 2. Dépouiller les productions des élèves et décider des solutions à retenir

Roy demande, une vingtaine de minutes avant la fin de la séance, que les élèves mettent au propre leur démarche et réponse au problème. Roy *fait un premier repérage* au passage de ce que font les élèves, selon la stratégie utilisée et les justifications employées. Après le cours, *il fera une sélection* de certaines solutions pour les présenter à la classe le lendemain. Cette sélection *se fera rapidement en essayant de refléter les bonnes et mauvaises solutions, la variété des stratégies utilisées* et *en privilégiant, en cas de similitude de stratégies, les élèves qui ne sont pas passés au tableau lors du cours précédent.* Roy préfère en effet qu'on ne choisisse pas toujours les mêmes élèves, car, explique-t-il, « il ne faut pas qu'on les stigmatise » puisqu'il y en a qui commencent à lancer des noms aux élèves qui sont trop impliqués (par exemple, un élève s'est fait surnommé *Fibonacci* en référence à une solution qu'il a trouvée et qui faisait le lien entre les nombres du problème et la suite de Fibonacci vue au primaire).

On est ici au cœur d'une activité centrale de la pratique d'un enseignant lorsqu'il donne des problèmes et des exercices aux élèves : revenir sur, et analyser, les solutions d'élèves. Ce tri peut se faire en différé à partir de solutions ramassées, ou dans l'action, à partir de ce qu'il observe quand les élèves travaillent sur le problème. L'enseignant fait ainsi un choix qui lui permet en quelque sorte d'organiser le retour en classe sur ce que les élèves on fait.

Sur quelle base se fait ce tri? L'analyse précédente met en évidence des balises qui guident l'enseignant : des critères *mathématiques* (validité ou non de la solution proposée), *didactiques* (rendre compte d'une variété de stratégies et de compréhensions du problème, bonnes ou non) et *pédagogiques* (un souci d'équité, pour ne pas toujours prendre les mêmes élèves, et sur la gestion de classe concernant les surnoms).

Épisode 3. Un exemple de retour sur les solutions d'élèves

Roy démarre un retour (portant sur un autre problème que celui des tours) *en resituant les élèves* par un rappel du problème des poignées de mains et des deux questions auxquelles il fallait répondre :

> Dans le cadre d'un échange international, 10 personnes provenant de pays différents se rencontrent pour la première fois. Comme le veut la coutume, chaque personne serre la main de toutes les autres et se présente.
>
> a) Combien de poignées de mains différentes les 10 personnes échangeront-elles lors de cette rencontre?
>
> b) Et s'il y avait plus de 10 personnes? Pouvez-vous trouver une manière de faire pour calculer le nombre de poignées de mains différentes qui vont s'échanger, et qui marcherait pour n'importe quel nombre de personnes présentes à la rencontre? Expliquez-nous

Il rappelle aux élèves que beaucoup ont trouvé ce problème simple et que c'est tant mieux, *car ce qui l'intéresse ce sont leurs différentes démarches et non simplement les réponses.* Roy explique qu'il veut comprendre comment ils s'y sont pris.

On voit apparaître ici des moyens mis en œuvre pour réactualiser l'engagement des élèves (remise en contexte du problème à travailler). Cette réactualisation renvoie à la fois à une *intention pédagogique,* pour resituer les élèves dans un cadre d'apprentissage en les préparant à la tâche, et à une *intention didactique,* en insistant sur les aspects importants de ce retour (expliquer la démarche et faire du sens de leur résolution par leurs explications). Ici aussi, de façon implicite, ceci communique aux élèves sa propre vision sur la façon de faire les mathématiques, axées dans ce cas sur l'explication et le partage entre eux.

Il invite une première équipe, celle de Carla et Claudia, à venir en avant pour partager leurs solutions. Pour la question (b), Carla explique qu'il faut faire, par exemple avec vingt personnes, 20 fois 19 puis diviser par 2. Un autre élève, Bernard, demandera pourquoi avec dix personnes ceci donne 45 poignées de main et avec vingt personnes le total est 190 poignées de main. *Roy lancera la discussion là-dessus : « Qu'est-ce que vous en pensez? ».*

Deux arguments contradictoires seront alors avancés par les élèves.

Bernard : « Le calcul n'est pas bon, car, comme dans le cas de 10 personnes, il faut tenir compte du fait que le nombre de poignées de mains doit être décroissant. »

Pascal : « Avec 20 personnes, on devrait avoir le double du nombre de poignées de mains obtenus avec 10 personnes, soit 90 et non 190. »

Pour trancher, Roy donnera aux élèves le cas de 5 personnes, en demandant « Qu'obtient-on ? » « 22,5 poignées? » Certains élèves diront 15 poignées et Carla dira que « 22,5 ça ne se peut pas ».

Diverses connaissances sont ici mobilisées dans l'action. Au plan *didactique,* Roy renvoie la question aux élèves, de manière à ce que les élèves prennent en charge la validation des solutions (on retrouve ici encore son insistance sur la justification par les élèves). Au plan *mathématique,* Roy trouve et propose le contre-exemple « 5 personnes donne-t-il 22,5 poignées ? » pour contrer la stratégie « avec 20 personnes, on devrait doubler ». Ce contre-exemple est aussi une stratégie teintée d'une intention *didactique* alors que le but de Roy est de faire réfléchir davantage les élèves sur les solutions qu'ils ont mis de l'avant et de semer un doute. De plus, Roy fera un lien explicite avec le programme d'études, au plan *institutionnel,* lors de la rencontre réflexive avec le chercheur : "L'enseignement du contre-exemple est au programme de première secondaire, je suis content de voir que les élèves ont compris le contre-exemple." On le voit bien ici, le recours au contre-exemple comme stratégie d'intervention par l'enseignant a des visées diverses et puise sa source dans des connaissances autant mathématiques (pour le trouver et le voir comme un contre-exemple de la solution proposée), didactiques (pour promouvoir la réflexion et le retour sur la solution, semer le doute) qu'institutionnelles (en référence au programme d'études).

Pour fins d'espace nous arrêterons ici notre récit commenté provenant de la pratique de Roy. Nous reviendrons sur ces épisodes et ce qu'ils mettent en évidence au regard des caractéristiques des connaissances mathématiques mises de l'avant par l'enseignant dans sa pratique.

« Connaître et utiliser les mathématiques dans l'enseignement » : une conceptualisation enracinée dans la pratique d'enseignement des mathématiques

Pour expliciter notre conceptualisation des connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignement dans sa pratique, nous soulignons premièrement le caractère imbriqué de ces connaissances et ensuite faisons ressortir trois dimensions fondamentales de ces connaissances : 1) leur nature : plus près d'un savoir-agir, de connaissances-en-acte, que de connaissances factuelles; 2) leur caractère situé; 3) leur caractère imprévisible et émergent, nécessitant la capacité de réagir sur le moment.

Imbrication des dimensions mathématiques, didactiques et pédagogiques : Une caractérisation au cœur des « connaissances mathématiques pour l'enseignement »

Comme l'ont expliqué clairement Ball et Bass (2003), la façon avec laquelle un enseignant s'engage dans une « situation mathématique » dans sa pratique est très différente de la manière dont s'engagerait un mathématicien dans une telle situation. L'analyse offerte ci-dessus permet de faire ressortir cette différence d'engagement. Ainsi, l'exploitation d'un problème de dénombrement (tel celui des tours) par un mathématicien conduirait sans doute ce dernier à s'intéresser au modèle combinatoire sous-jacent, à la formule générale donnant toutes les combinaisons possibles de tours, à la résolution d'une classe plus générale de problèmes faisant intervenir d'autres contraintes (un certain nombre de couleurs, différents arrangements). Pour l'enseignant, la résolution de ce problème et son exploitation n'est pas du tout envisagée dans la même perspective, mais plutôt en fonction de sa classe, des élèves, de ce qu'ils font, de la variété des stratégies, des modèles spontanés qu'ils élaborent et sur lesquels il va articuler, en regard de certaines intentions, la résolution et le retour. Il ne s'intéresse pas, comme nous le laissent entrevoir les données ci-dessus, aux modèles de permutations-arrangements, mais bien aux modèles spontanés des élèves, à leurs justifications, à la validité de ces modèles, à leur évolution.

Pour l'enseignant, une situation mathématique est donc toujours enracinée dans un contexte d'enseignement et d'apprentissage et est interprétée tout naturellement en lien avec ce contexte. Cette interprétation, comme nous l'avons fait ressortir ci-dessus, puise *simultanément* à diverses ressources : didactiques, pédagogiques, mathématiques, voire même institutionnelles. Ces dimensions sont constamment, et ce souvent de façon tacite, prises en compte dans la compréhension de la situation par l'enseignant. La « résolution » d'une telle « situation mathématique », son exploitation, se fait donc toujours simultanément sur différents plans. Chacun de ces plans joue un rôle à sa façon, nous l'avons vu dans ce qui précède, sur la signification que l'enseignant donne à la situation. Par conséquent, ces différents plans ne sont jamais mis de l'avant de façon isolée, chacun s'influençant les uns les autres. Ces diverses ressources sont évidemment distinguables ou analysables, comme nous l'avons fait ci-dessus, mais elles sont indissociables pour l'enseignant dans sa pratique. La lunette d'analyse de l'enseignement, sa « grille de lecture », en est donc une teintée à la fois de pédagogie, de didactique et de mathématiques, et souvent même d'aspects institutionnels. Un exemple clair de ceci est l'utilisation du contre-exemple par l'enseignant à l'épisode 3, alors que cette utilisation traduit en même temps une compréhension mathématique pour le trouver (en plus de saisir son rôle potentiel dans la résolution du problème), une compréhension didactique sur l'apport du contre exemple dans l'enseignement (visant à semer le doute, à provoquer un retour sur la solution proposée par les élèves) et une compréhension institutionnelle (par sa référence à l'enseignement du contre exemple au programme). En ce sens, malgré que celles-ci soient appelées « connaissances mathématiques pour l'enseignement », elles ne sont jamais purement mathématiques, puisqu'elles sont pour nous simultanément mathématiques, didactiques et pédagogiques/institutionnelles. Ainsi, au cœur de la pratique d'enseignement, il y a une mise en œuvre *d'une connaissance complexe et spécifique, composée de dimensions imbriquées et articulées les unes aux autres.*

Clarifications conceptuelles et épistémologiques additionnelles sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement

A. Les « connaissances mathématiques pour l'enseignement » de l'enseignant, comme nous l'avons vu dans le cas de Roy, sont des *connaissances qui se développent dans l'action* (une certaine grille de lecture, des balises/critères, des manières de faire, etc.) *en lien avec les tâches effectives réalisées par l'enseignant* (par exemple le choix de problèmes, d'activités à donner aux élèves; la mise en route et résolution de problèmes par les élèves; le tri des productions des élèves à des fins de retour sur ce qu'ils ont fait; le retour collectif sur les solutions; ou encore la correction de devoirs ou travaux d'élèves). Ces tâches effectives, et l'activité professionnelle de l'enseignant confronté à ces tâches, constituent en quelque sorte le point d'ancrage de ces connaissances élaborées dans l'action – et qui sont appelées à se raffiner et à s'approfondir lorsque cette activité sera reprise dans le même groupe ou avec des groupes différents, lorsque de nouvelles tâches seront introduites, lorsque ces tâches seront reprises, modifiées et enrichies d'une année à l'autre. Nous rejoignons là les travaux de recherche conduits ces dernières années en didactique des mathématiques sur l'analyse des pratiques enseignantes, qui montrent bien ces gestes professionnels développés dans l'action (voir, entre autres, Butlen, 2006; Robert, 2001; Roditi, 2005). Ces connaissances-en-acte, ce savoir agir, ne relèvent ainsi nullement de connaissances factuelles, « statiques », que l'on peut s'approprier indépendamment de cette pratique qui leur donne sens.

B. Apparaît ici une autre des caractéristiques importantes de ces connaissances : *Ces connaissances sont situées* (Lave, 1988), *elles s'élaborent dans un certain contexte lié à la pratique d'enseignement des mathématiques.* Ainsi, ces dernières ne sont pas indépendantes de l'apprentissage et des élèves, de la classe – du contexte à l'intérieur duquel elles entrent en jeu. On parle donc ici d'un savoir-enseigner, de connaissances en acte qui se déploient en situation réelle d'enseignement, là où ce savoir enseigner se re-construit et se raffine sans cesse. On peut parler en ce sens d'un contexte qui agit comme ressource structurante (Lave, *ibid.*) de l'apprentissage de l'enseignant. Ces connaissances construites dans l'action sont appelées à s'adapter et se restructurer d'une situation à une autre, dans l'expérience que l'enseignant fait de cette situation en regard de la viabilité des interventions mises en place, des principes et balises qui le guident. Nous empruntons ici au constructivisme cette notion de viabilité (Glasersfeld, 1988) et cette conception d'un savoir-agir construit dans la pratique, en contexte particulier, un savoir agir situé, qui s'oppose à l'idée d'un savoir qui serait applicable universellement à tout contexte. Les « connaissances mathématiques pour l'enseignement » peuvent ainsi être vues comme des réponses adaptées au contexte et à la situation d'enseignement/apprentissage reconstruite par l'acteur. Comme l'explique Schön (1983), le professionnel (ici, l'enseignant) développe et construit un savoir agir à travers ses expériences diverses, et c'est ce bagage construit et accumulé au fil des expériences qui lui permet d'intervenir, de guider ses interventions et d'interagir en situation (d'enseignement). L'apprentissage de l'acte d'enseigner se construit donc en lien serré avec la pratique, dans un contexte d'enseignement des mathématiques, et met en jeu tout un réseau de compréhensions en fonction de ce que comprend l'enseignant de la situation, de ses intentions, de ce que l'élève donne comme solution, de leurs réactions sur lesquelles il faudra réagir et interagir de façon adéquate en s'adaptant au besoin (ce que Schön appelle le « back-talk » de la situation). Cette réaction-intervention de l'enseignant émerge du bagage de connaissances mathématiques, didactique et pédagogiques/institutionnelles élaborées *in situ,* comme nous l'avons vu ci-dessus.

À travers ce qui précède, le rôle du contexte apparaît ainsi central. Tout développement de « connaissances mathématiques pour l'enseignement » est nécessairement enraciné dans une situation d'enseignement/apprentissage des mathématiques donnée, en lien avec les tâches effectives de l'enseignant. Nous nous distançons en ce sens d'une certaine conception standardisée de la pratique et, en conséquence de la formation des enseignants, qui emprunte à une rationalité technique, dans laquelle les outils fournis aux enseignants (manuels, situations, matériel didactique, etc.) sont conçus pour fournir des solutions toutes faites aux problèmes rencontrés en pratique. En enracinant le dévelop-pement de ce savoir agir en contexte, une conception différente de la pratique est sous-jacente, empruntant au concept de rationalité pratique développé par Schön (1983), une pratique qui comporte une part importante de situations indéterminées, non prévisibles, faisant appel au jugement en contexte de l'enseignant.

C. Cette conception renvoie à une dernière caractéristique des « connaissances mathématiques pour l'enseignement », dans ce que Mason et Spence (1999) appellent *knowing-to act in the moment.* Ainsi, ce savoir-enseigner de l'enseignant se construit en classe et s'adapte en temps réel à la situation, alors que l'enseignant doit s'inventer des réponses lorsque la dynamique de classe l'oblige à sortir du script de sa planification habituelle. On parle donc ici de *connaissances produites sur-le-champ, adaptées et en réponse à la situation.* L'enseignant, dans l'action d'enseigner, doit réfléchir constamment aux possibilités, doit inventer des avenues et représentations nouvelles en réaction aux façons de faire et de comprendre des élèves, doit penser à des explications supplémentaires à donner pour clarifier ou resituer le problème, doit faire des choix en insistant sur certains points et non sur d'autres. Il faut, en plus d'entrevoir des avenues possibles à emprunter, être capable de sentir que telle ou telle explication est reliée à ce que l'élève offre comme solution, qu'elle pourra lui être profitable pour l'aider à faire plus de sens, pour l'amener plus loin. On ne parle donc pas de connaissances préalablement établies dans le but de se préparer à bien interagir, mais plutôt de *connaissances élaborées en contexte,* de *connaissances en acte* adaptées (en réaction à une situation) et de *connaissances-interventions déployées sur-le-champ* en réponse à un événement (un script qui sort de la planification prévue, une question d'élève, une réponse inattendue, une erreur non prévue, etc.).

Pour mieux voir la portée du changement de cap important amené par cette conceptualisation des « connaissances mathématiques pour l'enseignement », nous abordons pour terminer quelques exemples d'interventions élaborées à la formation des enseignants pour favoriser et promouvoir le développement de ces connaissances par les futurs enseignants.

Illustrations de travaux faits à la formation des enseignants pour promouvoir ces connaissances professionnelles

Ce qui suit provient d'interventions mises en place à l'intérieur du programme de formation des enseignants du secondaire de l'Université du Québec à Montréal, développé depuis les années 1970 par un groupe de didacticiens des mathématiques. Plutôt que de reprendre ce programme et ses particularités (ce qui a été fait largement dans Bednarz, 2001; Bednarz, Gattuso et Mary, 1995; Bednarz et Perrin-Glorian, 2003; Bednarz et Proulx, 2005; Janvier, 1996; Janvier et Hosson, 1999), nous offrons ici des illustrations spécifiques de tâches offertes et de manières de faire, qui prennent en compte les aspects développés dans la section 3.

Des connaissances-en-acte/un savoir agir mobilisant de multiples ressources imbriquées

Dans le premier cours de didactique des mathématiques, offert en première année de formation, les étudiants ont à préparer trois leçons consécutives, l'une d'entre elles devant être réalisée devant leurs pairs et un enseignant du milieu scolaire, puis critiquée par les différents intervenants (le formateur didacticien, les pairs, l'enseignant en exercice), et réajustée – le cycle reprenant sur une autre leçon portant sur un autre sujet. Dans cette situation de planification, d'enseignement en groupe devant les pairs (jouant le rôle d'élèves), de réflexions sur cet enseignement et de re-construction, chaque étudiant est confronté à une lecture multiple des leçons présentées au regard de différents registres : le regard imbriqué didactique-mathématique du didacticien-formateur sur les contenus scolaires abordés, sur les concepts et raisonnements clés mis en jeu, sur l'interaction avec les solutions d'élèves, etc. ; celui du praticien faisant intervenir d'autres éléments en référence à sa didactique praticienne et son savoir d'expérience, tels celui des aspects pédagogiques, de gestion de classe, de sa connaissance des élèves réels et de leur fonctionnement, du programme, etc.; celui des pairs avec leurs connaissances en construction, leurs conceptions, etc. Cette confrontation à de multiples points de vue (en lien avec chacune des leçons présentées) fournit au futur enseignant l'occasion de se construire dans l'action un certain savoir agir (un répertoire d'interventions, une grille de lecture de ce qui se passe, des balises) mettant à contribution différentes ressources imbriquées (didactiques, pédagogiques, mathématiques, institutionnelles) et d'élaborer, lors du travail de réaction/réflexion sur la situation d'enseignement auquel il participe, un cadre de référence personnel-professionnel sur l'enseignement des mathématiques (voir Bednarz, Gattuso et Mary, 1995, pour plus de détails sur ce cours, et Proulx, 2003, pour plus de détails sur la façon avec laquelle ce cadre de référence se développe et est mobilisé par les futurs enseignants).

Des connaissances actions situées mettant à contribution de multiples dimensions imbriquées

Le cycle précédent est repris en *contexte réel* de classes du secondaire à de multiples occasions durant le programme, à travers trois stages de formation : un au premier cycle du secondaire, un au deuxième cycle du secondaire et un en contexte de clientèles diversifiées (difficultés d'apprentissage, adultes, douance, classe multilingue, etc.) pour lequel ils ont à développer des interventions spécifiques aux élèves et aux milieux dans lesquels ils interviennent. À différents moments, en lien avec leurs travaux de planification, les futurs enseignants conduisent des analyses en profondeur des contenus mathématiques à enseigner, intégrant ici les dimensions imbriquées mathématiques, didactiques et pédagogiques/institutionnelles. Ces « analyses conceptuelles » des contenus à enseigner prennent la forme de documents écrits et contiennent, dans un premier temps, une dimension mathématique/institutionnelle sur le sens à donner au concept, les raisonnements clés et la situation du concept dans le programme d'études en relation avec les concepts pertinents et reliés qui précèdent et suivent son étude (aux différents niveaux du secondaire et pour les autres disciplines). Dans un deuxième temps, ces analyses conceptuelles contiennent une dimension didactique, à travers une anticipation des raisonnements, erreurs, difficultés et conceptions susceptibles d'être rencontrées par les élèves, un choix de problèmes en lien avec les raisonnements clés à travailler et les erreurs à contrer, et la planification de verbalisations et approches pour favoriser la compréhension des concepts.

Ces documents sont utilisés fréquemment à l'intérieur des cours, alors que les futurs enseignants les consultent (leur donnent un sens) en lien avec les contenus travaillés dans les cours, les utilisent comme outil référence pour développer leurs enseignements durant leurs stages et, durant la dernière année de formation, produisent la leur sur un sujet choisi, étant de plus encadrés par un formateur (qui est souvent un enseignant du milieu ou qui possède une expérience d'enseignement). L'intention derrière cette utilisation « évolutive » est de permettre une appropriation de ces analyses conceptuelles, en sensibilisant les futurs enseignants à leur richesse et importance, ainsi que de les amener à pouvoir produire de telles analyses impliquant des ressources imbriquées.

Articulations avec la réalité de la classe

Ce souci envers la réalité de la classe est aussi présent à travers l'accent mis dans les cours sur la situation d'apprentissage en contexte réel, par le biais de solutions réelles d'élèves (productions d'élèves puisées dans les stages, vidéos de leurs propos et leurs actions en situation) et de situations d'enseignement (exemples de scénarios de leçons, et vidéos de leçons de stagiaires et d'enseignants). Nous offrons ici deux exemples.

À titre d'exemple de tâche autour des *connaissances-en-acte enracinées dans le contexte de classe,* la tâche suivante place l'étudiant dans une salle de classe de secondaire 1 (7ème année) et le force à intervenir sur l'enseignement de la multiplication de fractions. Ici, l'introduction par le formateur/didacticien de certaines contraintes (sens de la multiplication, visualisation, nombres différents) relève d'une intention didactique, soit de faire saisir au futur enseignant les ruptures de sens qui surviennent, en plus des conceptions et difficultés qui apparaissent chez les élèves, dans le passage des nombres naturels aux rationnels.

> Vous êtes enseignant en secondaire 1. Vous vous proposez d'aborder la multiplication d'une fraction par une fraction, en utilisant les nombres donnés ci-dessous :
>
> (a) 10×3 (b) $10 \times {}^{3}/_{4}$ (c) $10 \times 1\,{}^{1}/_{5}$ (d) ${}^{10}/_{11} \times 1\,{}^{1}/_{5}$
>
> - Composez un problème en contexte, accessible aux élèves et visualisable, où la multiplication a le sens d'addition répétée;
> - Prévoyez une illustration à utiliser pour l'ensemble des nombres à travailler qui aiderait les élèves à visualiser l'opération;
> - Montrez, pour chaque cas, à l'aide d'illustrations et de verbalisations spécifiques, comment on peut anticiper la réponse en passant de a à c.

À titre d'exemple de *connaissances-en-acte déployées sur le champ,* l'exemple qui suit se penche sur les décimaux et leur enseignement en secondaire 1 (7ème année).

Cette tâche sollicite un repérage des erreurs et raisonnements sous-jacents de l'élève, en plus d'un diagnostic dans l'action pour en quelque sorte confirmer ce que peut être l'erreur (questions b, c). En d), le futur enseignant est aussi amené à prévoir des interventions sur le champ qui amèneront les élèves à réfléchir sur les causes de l'erreur.

> Vous êtes enseignant en secondaire 1 et vous proposez l'exercice suivant à vos élèves.
>
> > Écrire les nombres suivants en ordre croissant :
> > 2,46 2,254 2,3 2,052 2,32
>
> Plusieurs élèves donnent comme réponse :
> 2.052 2.3 2.32 2.46 2.254
>
> D'autres écrivent :
> 2,052 2,254 2,32 2,46 2,3
>
> a) Décrivez et donnez un sens à l'erreur ou aux erreurs des élèves;
>
> b) Composez un problème semblable où le raisonnement provoquerait la même erreur, confirmant la stratégie;
>
> c) Composez un problème semblable où le raisonnement produirait une bonne réponse;
>
> d) Comment interviendriez-vous face à ces difficultés?

Les tâches qui précèdent donnent un bref aperçu de la manière dont une partie de la formation des enseignants en mathématiques au secondaire, au niveau didactique, s'actualise au cours des quatre années du programme. Elles illustrent que l'articulation/l'imbrication des dimensions mathématique, didactique, pédagogique, voire institutionnelle y constitue un enjeu important. Nos pratiques de formation orientées vers le développement d'un savoir agir enraciné dans le contexte réel de l'apprentissage des élèves et de l'enseignement dans une classe s'articulent constamment sur ces diverses dimensions. Elles placent également le futur enseignant en situation d'intervention sur le champ; l'acte d'enseigner impliquant la capacité de réagir rapidement dans des situations interactives avec les élèves face aux erreurs, questions et interactions qui sortent du script prévu dans la planification.

Conclusion

Sur la base de l'utilisation de vignettes provenant de la pratique réelle d'un enseignant, nous avons offert notre conceptualisation de ce que veut dire « connaître et utiliser les mathématiques pour l'enseignement » et avons par la suite développé sur diverses composantes théoriques de cette connaissance (caractère multidimensionnel, situé, dans l'action, sur le moment). Cette conceptualisation et théorisation a été pour nous une source d'inspiration importante pour structurer et organiser nos interventions, comme formateurs, pour former des professionnels de l'intervention en enseignement des mathématiques. À travers des exemples tirés de nos cours, nous avons essayé d'illustrer comment nous amenons nos futurs enseignants à travailler avec et à travers diverses ressources imbriquées (mathématiques, didactiques et pédagogiques/instituionnelles) que l'enseignant mobilise constamment dans sa pratique. Tel que l'explique Ball (2000), il ne s'agit en effet nullement de penser ces connaissances pour l'enseignement, ainsi que nos programmes de formation, en termes d'un découpage de différentes connaissances, où l'articulation entre ces dernières est de plus laissée à la charge du futur enseignant. Il s'agit plutôt ici de penser ces connaissances de manière située, en prenant la situation d'apprentissage et d'enseignement des mathématique comme référence, et en favorisant chez le futur enseignant la construction simultanée des différentes dimensions imbriquées que nécessite l'enseignement des mathématiques en contexte réel, en tenant compte de (et pour) l'apprentissage des élèves.

Notes

[1] An English version of this article was published in the November 2009 issue *For the Learning of Mathematics* (vol. 29, no. 3, pp. 11–17).

[2] Ceci représente notre tentative personnelle de traduction des diverses expressions anglophones utilisées dans le domaine, par exemple *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT; Ball et al., 2009), *Mathematics-for-Teaching* (MfT; Davis et Simmt, 2006), *Mathematics-in-and-for-teaching* (MifT; Kieran, Kubota-Zarivnij et Mason, 2009), etc.

[3] Pour mieux comprendre quelques unes des particularités et multiplicité des perspectives de la didactique des mathématiques au Québec, voir Bednarz (2007).

[4] Ceci dit, il faut faire attention de ne pas associer aveuglément à une même orientation tous les auteurs qui se réclament de ce mouvement de recherche. Il semble en effet y avoir des liens mais aussi des différences significatives entre les chercheurs qui se placent dans ce mouvement de recherche ; des perspectives qui se détachent souvent de façon marquée des propos des auteurs à l'origine de cette théorisation, soit le groupe de recherche de D. Ball et H. Bass.

[5] La caractéristique « pédagogique » renvoie davantage à la classe comme mini-société avec ses règles sociales, ses normes et son fonctionnement. Elle concerne tout ce qui a trait à l'établissement de la relation avec les élèves de manière générale et à la gestion de classe. La caractéristique « didactique » place au centre de cette négociation dans la classe le savoir en jeu au cœur des situations d'enseignement et d'apprentissage, elle est donc centrée, en ce sens, sur l'avancée des connaissances mathématiques des élèves. La connotation technique souvent associée au terme « didactique » dans la communauté anglophone n'est pas du tout celle reprise ici.

[6] Nous avons repris entre guillemets le discours tenu par l'enseignant.

Références

Adler, J., & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 270-296.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51* (3), 241-247.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, Canada: CMESG.

Ball, D. L., Thames, M. H., Bass, H., Sleep, L., Lewis, J., & Phelps, G. (2009). A practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In Tzekaki, M., M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group fro the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 95-98). Thessaloniki, Greece: PME.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed.) (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation, 20*(1), 175-198.

Barry S. (2008). *Analyse des ressources mises à contribution par enseignant et chercheur dans l'élaboration de scénarios d'enseignement en dénombrement visant le développement de la modélisation en secondaire 1.* Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 1*(1), 61- 80.

Bednarz, N. (2004). Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. In M. Niss, E. Emborg (Eds.). *Proceedings of the 10th International Conference on Mathematics Education.* Copenhagen, Denmark, CD-ROM.

Bednarz, N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. Dans P. Marchand (Ed.) *La didactique des mathématiques au Québec : Genèse et perspectives* (pp. 21-61), Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques au Québec. UQÀR.

Bednarz, N., Desgagné, S., Diallo, P., Poirier, L. (2001). Approche collaborative de recherche: une illustration en didactique des mathématiques. In P. Jonnaert, S. Laurin (Eds.) *Les didactiques des disciplines, un débat contemporain* (pp. 177-207). Presses de l'Université du Québec.

Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S., Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques: une nécessaire prise en compte des praticiens. Dans A. Mercier, G. Lemoyne, A. Rouchier (Eds.) *Sur le génie didactique: usages et mésusages des théories de l'enseignement* (pp. 43-69). Bruxelles: Éditions de Boeck.

Bednarz, N., Gattuso, L., & Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, 35*(1), 17-30.

Bednarz, N., & Perrin-Glorian, M. J. (2003). Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles: Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2003.* Tunis: Éditions CNP.

Bednarz, N., & Proulx, J. (2005). Practices in mathematics teacher education programs and classroom practices of future teachers: From the educator's perspectives and rationales to the interpretation of them by the future teachers. In R. Lins & A. Olimpio Jr. (Eds.), *Contributed papers, demonstrations and worksessions: The fifteenth ICMI study –*

The Professional education and development of teachers of mathematics. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.

Butlen, D. (2006). Stratégies et gestes professionnels de professeurs des écoles débutants enseignant dans des écoles de milieux défavorisés : un enjeu pour les apprentissages des élèves. In N. Bednarz, C. Mary (Eds.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2006).* Sherbrooke : Éditions du CRP. CD-ROM.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293-319.

Dufour-Janvier, B., et Hosson, N. (1999). L'étudiant futur enseignant en interaction dans le cadre d'activités géométriques variées : observations et éléments de réflexion. In B. Côté (Ed.), *Actes du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec « De Euclide à Cabri : le point sur la didactique de la Géométrie »* (pp. 39-53). Montréal : UQÀM.

Glasersfeld, E. von. (1988). Introduction à un constructivisme radical. In P. Watzlawick (Eds.), *L'invention de la réalité* (pp. 19-43). Paris: Éditions du Seuil.

Janvier, C. (1996). Constructivism and its consequences for training teachers. In L.P. Steffe et P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp 449-463). Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum.

Kieran, C., Kubota-Zarivnij. K., & Mason, J. (2009). Working Group B report. Mathematics-in-and-for-Teaching (MifT) : The case of algebra. In P. Liljedhal (Ed.), *Proceedings of the 2008 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 41-54). Burnaby, BC : CMESG.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Margolinas, C., Coulange, L., & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 205-234.

Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 135-161.

Moreira., P. C., & David., M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal for Mathematics Teacher Education, 11*(1), 23-40.

Proulx, J. (2003). *Pratiques des futurs enseignants de mathématiques au secondaire sous l'angle des explications orales : Intentions sous-jacentes et influences.* Mémoire de maîtrise inédit, Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec, Canada.

Proulx, J. & Bednarz, N. (2008, juillet). *The mathematical preparation of secondary mathematics schoolteachers: Critiques, difficulties and future directions.* Texte présenté lors de ICME-11 dans le TSG-29. Monterey, Mexique. http://tsg.icme11.org/tsg/show/29

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en didactique des mathématiques, 21*(1-2), 57-80.

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques.* Paris : L'Harmattan.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner.* United States: Basic Books.