MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE SOUS L'ANGLE D'ARISTOTE, ARCHIMÈDE ET CHÂTELET

FRANÇOIS LAGACÉ

En 1926, Albert Einstein conclut une présentation dans laquelle il s'intéresse aux liens historiques entre la géométrie et la physique :

> [Riemann] parvint ainsi, par la pure spéculation mathématique, à la pensée de l'indissociabilité de la géométrie et de la physique, dont l'idée, soixante dix ans plus tard, devint réalité avec la théorie de la relativité générale, par laquelle la géométrie et la théorie de la gravitation se fondent en une seule entité. (Einstein, 1926)

Ces liens occupent en effet depuis longtemps les esprits des scientifiques s'intéressant aux mathématiques et/ou à la physique.

Récemment, des didacticiens des mathématiques et des sciences se sont aussi intéressés à ces liens. Par exemple, Hanna et Jahnke (1999, 2002) misent sur l'utilisation de concepts relevant de la physique dans l'enseignement de la preuve en mathématiques pour développer des séquences d'enseignement. Ils cherchent à tirer profit d'une rencontre entre des concepts ou modèles physiques et des théorèmes mathématiques afin d'aider à *comprendre pourquoi ils sont vrais.* Tanguay et Geeraerts (2012) présentent une approche semblable à travers ce qu'ils appellent « la géométrie du physicien-géomètre ». Ils veulent approcher la géométrie *à la manière de la physique expérimentale,* suggérant par exemple que les élèves se basent sur la mesure pour élaborer des hypothèses ensuite investiguées par l'entremise des mathématiques. Radford, Savage et Roberge (2002) mettent plutôt l'accent sur le *développement de discours scientifico-mathématiques* à travers des situations où physique et mathématiques se rencontrent. Ils mettent en évidence la complexe articulation entre physique et mathématiques dans le discours des élèves, développé dans la rencontre du traitement mathématique et des expérimentations.

Ces trois exemples montrent que ces chercheurs exploitent à leur façon la relation entre mathématiques et physique : par rapprochement conceptuel ou emprunt méthodologique ou en tablant sur la présence d'une relation fructueuse entre les deux. Cependant, la nature de cette relation n'est pas directement abordée dans ces recherches. Elle semble aussi, souvent, conceptualisée d'une manière qui ressemble peu à ce qu'avance Einstein lorsqu'il dit que « la géométrie et la théorie de la gravitation se fondent en une seule entité ». Peut-on alors encore parler de rapprochements conceptuels ou d'emprunts méthodologiques ? Quels rôles la physique peut-elle jouer dans cet enrichissement des mathématiques ?

Pour aborder ces questions, je propose une étude épistémologique [1] à partir des écrits de trois philosophes et praticiens des sciences et des mathématiques qui se sont explicitement penchés sur la relation entre physique et mathématiques : Aristote, Archimède et Gilles Châtelet [2]. Le choix présenté permet de dresser un portrait accessible de la question en montrant les ressemblances et les nuances entre les perspectives développées dans la Grèce Antique, puis dans le travail d'un contemporain dont l'intérêt est grandissant dans notre domaine.

Je montre aussi comment ces perspectives peuvent être rapprochées du travail des chercheurs en didactique des mathématiques mentionnés précédemment. Je propose de considérer ces rapprochements comme : (a) une occasion de développer un fondement épistémologique pour les travaux s'intéressant aux liens entre physique et mathématiques, mais aussi (b) de venir "troubler" ces postures, encourageant les chercheurs du domaine à s'engager sur le plan épistémologique afin de générer de nouvelles questions (Proulx et Maheux, 2012). Dans la section suivante, les perspectives d'Aristote, d'Archimède et Châtelet sont présentées. Je reviens ensuite sur les travaux de Hanna et Jahnke, Tanguay et Geeraerts ainsi que Radford, Savage et Roberge en considérant les épistémologies développées. Cet article se voulant une introduction à la problématique susmentionnée, il facilitera la lecture d'autres travaux éventuellement important à discuter, en particulier ceux de Roth (*e.g.,* 2014) autour de l'activité graphique des scientifiques, et les articles récents portant sur Châtelet dans notre domaine.

Aristote (-384, -322) : la physique comme révélatrice de mathématiques

Dans la *Métaphysique,* Aristote se questionne sur la nature des mathématiques. Après avoir reconnu dans le livre III que « les êtres mathématiques ne peuvent se retrouver dans les choses sensibles » (Aristote, XIII, 1, §12, 1879) [3], il détermine qu'elles sont antérieurement logiques aux êtres, mais qu'elles ne leurs seront jamais substantiellement antérieures (§14). Autrement dit, bien qu'elles ne soient pas dans les choses sensibles, c'est à partir de ces dernières qu'elles sont accessibles. Or, ces choses sensibles appartiennent précisément au monde

« naturel » de la physique, dont l'étude rationnelle permet d'extraire certains aspects appartenant aux mathématiques (Aristote, XIII, 3, §5, 1879c). Une discussion semblable apparaît dans *Derniers Analytiques:*

> C'est qu'ici, en effet, la connaissance du fait appartient à la science qui relève uniquement des sens [entendre ici la physique], et la connaissance de la cause appartient aux sciences mathématiques. Ce sont elles qui, seules, possèdent les démonstrations des causes, ignorant d'ailleurs souvent si la chose existe [...] parce qu'elles n'y regardent pas. (Aristote, I, 13, §15, 1842)

La physique apparaît donc pour Aristote comme la science de la nature (Aristote, I, 1, §1, 1862a), lieu des êtres naturels. Il affirme que les mathématiques peuvent permettre de comprendre comment certains phénomènes se produisent, mais ne peuvent répondre à « pourquoi » ils se produisent. La raison tient dans la distinction qu'il propose entre la forme et l'essence des objets du monde naturel. La physique cherche à comprendre le monde en s'intéressant à la forme *et* à sa nature, par laquelle la forme acquiert certaines propriétés, alors que les mathématiques s'intéressent à la forme, faisant abstraction de ses propriétés donc de la nature des objets. Le physicien étudiant les astres considère qu'il s'agit d'objets massifs, relativement sphériques, ayant une température et une composition donnée. Le mathématicien se défait de ces considérations pour ne s'intéresser qu'à la forme (*e.g.,* des sphères, des elliptiques), sans tenir compte des propriétés des formes qu'il révèle, ou que ces formes proviennent ou non du « monde réel » (Aristote, II, 2, 1862b). Or, ce qu'Aristote considère comme la cause des choses est intimement liée à leur essence, considérée comme *mouvement* au sens d'un déplacement spatial et comme transformation, les faisant appartenir au domaine de la physique (Aristote, VII, 3, §3-§6, 1862b).

Par exemple, une pierre est *formée* par un *assemblage* d'éléments lui donnant des caractéristiques mesurables dans l'espace (y compris la masse, associée à un déplacement relatif). Elle est aussi *transformée* en colonne pour un temple, fonction qu'elle peut occuper grâce aux propriétés physiques qu'elle possède.

La distinction entre les mathématiques et la physique dépasse toutefois les considérations autour des objets dont chacune s'occupe. Aristote laisse entendre que cette distinction concerne aussi les *buts* recherchés par ces disciplines et les *moyens* employés. D'une part, si les efforts portés par les mathématiques concernent des objets qui ne sont *pas* les êtres (mais uniquement leur forme ou des quantités particulières révélées par ces êtres), ces efforts ne cherchent pas à comprendre la nature, mais plutôt des cas particuliers. Il ne s'agit pas de comprendre le monde, mais de comprendre les mathématiques *révélées* par le monde. Il s'ensuit que les moyens de l'une des disciplines diffèrent de ceux de l'autre : les mathématiques utilisent des moyens de la même espèce que les objets qu'elle étudie, elles se servent d'outils développés à partir des objets mathématiques (*e.g.,* des théorèmes, des formules) pour répondre à ses questions. La physique procède de manière similaire, faisant usage de moyens physiques et donc sensibles (*e.g.,* des instruments de mesure) pour enrichir sa compréhension du monde.

La distinction développée par Aristote mène néanmoins à quelques cas complexes intéressants. Ce sont des cas où il y a mélange entre la nature des moyens permettant de parvenir à la compréhension d'un phénomène et la motivation première. Ainsi, Aristote explique que l'optique, l'harmonie et l'astronomie sont des disciplines « récalcitrantes » aux définitions des objets d'études des mathématiques et de la physique, en raison de la conjugaison entre la manière dont l'étude est faite et les buts recherchés. Par exemple, l'astronomie et l'optique sont des sciences fondées sur la géométrie. Cependant, contrairement à la géométrie qui s'inspire de la réalité pour étudier les formes qu'elle peut y abstraire, elles s'inspirent des réalités qui les concernent pour en extraire les objets géométriques *dans le but* d'étudier les astres ou la lumière (pas les objets géométriques). Ces deux sciences utilisent donc des outils relevant des mathématiques (figures géométriques, théorèmes associés) en tant que représentants de « réalités » dans le but de comprendre le monde physique. La finalité de ces sciences est donc d'ordre physique, mais leurs moyens sont empruntés aux mathématiques, faisant dire à Aristote qu'elles relèvent d'une branche plus « physique » des mathématiques (Aristote, II, 2, §7, 1862b).

Dans l'ensemble, il se dégage l'idée d'une relation entre mathématiques et physique où les deux disciplines, fortement séparées, évoluent en parallèle ; la physique permettant néanmoins de nourrir les mathématiques en objets d'intérêt. En révélant la présence d'objets mathématiques (*e.g.,* des nombres, des figures, des relations), la physique donne accès à des entités dont l'origine est familière. Nous apprenons de la physique *pourquoi* nous nous intéressons au cercle obtenu en déplaçant une pierre attachée par une corde à un piquet. Mais les mathématiques permettent de comprendre *comment* ce que nous imaginons alors est un cercle. Dans certains cas, de l'étroitesse de la relation entre les deux disciplines, demeurant fondamentalement distinctes, naissent des cas où les objets mathématiques sont si proches des phénomènes observables qu'il devient possible de raisonner mathématiquement sur eux. Il en résulte des compréhensions du monde étant aussi des compréhensions mathématiques. De manière ontologique cependant, la nature de ces compréhensions reste accidentelle : il y a coïncidence, mais les objets qui se rencontrent ne s'unifient pas pour autant. Qui plus est, une certaine directionalité de la relation entre mathématiques et physique est préservée : la physique révélant toujours des mathématiques. En revanche, les mathématiques contribuent à mieux faire comprendre le monde au sujet des formes qui l'habitent. Elles sont en ce sens "au service" de la physique.

Archimède (-287, -212) : la physique comme évocatrice de mathématiques

Archimède présente une vision qui, si elle partage certains éléments de celle d'Aristote, s'en distingue de manière importante. Reconnu pour ses inventions et découvertes mathématiques et physiques, Archimède n'avait d'intérêt que pour les mathématiques, ne considérant ses connaissances et découvertes en physique que dans la mesure où elles lui permettaient de confirmer ses intuitions et, ultimement, de proposer des avenues vers des preuves mathématiques (Ricard, 1844). C'est ainsi que, dans *La méthode relative aux* *théorèmes mécaniques,* Archimède explique comment la mécanique l'a guidé dans la rédaction de preuves géométriques qu'il n'aurait pu résoudre considérant la position des géomètres de l'époque sur les infinitésimaux (Peyrard, 1807). Archimède reste cependant réticent face à ces résultats : « certain things [...] first became clear to me by a mechanical method, although they had to be proved by geometry afterwards because their investigation by the said method did not furnish an actual proof » (Heath, 1921, p. 21).

Ainsi, il apparaît qu'Archimède n'entrevoyait qu'un rapport de servitude de la physique vers les mathématiques. Alors qu'Aristote entrevoit que les mathématiques puissent faire abstraction de la réalité sensible dans laquelle elles sont perceptibles, Archimède insiste sur le fait que les observations d'ordre physique ne donnent pas véritablement accès aux idées mathématiques. Le monde sensible peut cependant servir *d'inspiration* pour travailler en mathématiques. En ce sens, il ne cherche pas à isoler les mathématiques de la physique pour mieux les étudier. En effet, bien qu'il reprenne la distinction platonicienne séparant de manière fondamentale les idées (mathématiques) du monde sensible, Archimède propose de faire vivre la réalité du monde physique aux mathématiques pour mieux les comprendre, mieux les découvrir, mieux les prouver :

> In [The Method] Archimedes tells us how he discovered certain theorems in quadrature and cubature, namely by the use of mechanics, weighing elements of a figure against elements of another simpler figure the mensuration of which was already known. (Heath, 1921, p. 21)

Pour Archimède le monde n'incarne pas des entités mathématiques, mais les *évoquent*. C'est ce pouvoir de suggestion, qui ne porte pas uniquement sur des objets ou leurs relations, mais permet aussi d'imaginer des méthodes intéressantes pour le travail mathématique, qu'Archimède met de l'avant (j'y reviens).

On constate une différence importante entre la posture épistémologique d'Archimède et celle d'Aristote concernant les relations entre mathématiques et physique. Les mathématiques physiques d'Aristote sont intrinsèquement proches de certains phénomènes physiques et cette proximité rend possible leur emprunt quand vient le temps de décrire certains phénomènes. Une différence avec la position d'Archimède sur la relation se pose : pour lui, la recherche en physique permet de *s'approcher* des idées mathématiques. C'est en quelque sorte la raison d'être principale de la physique, qui se trouve à son tour considérée au service de sa vis-à-vis ! Par ce revirement, surprenant vues les nombreuses inventions attribuées à Archimède, se découvre donc un projet à l'opposé de celui d'Aristote : saisir les mathématiques à l'aide du monde physique.

Il faut revenir sur les éléments de méthode permettant de bien voir la manière dont Archimède conçoit le rapport entre mathématiques et physique. J'ai référé au fait que sans la mécanique, Archimède n'aurait pu résoudre certaines propositions géométriques. Son travail bien connu sur la quadrature de la parabole, en lien avec le principe de levier qu'il a théorisé, est un exemple souvent discuté : se servant de mesures obtenues en comparant successivement le poids des segments d'une section de parabole avec ceux d'un triangle (connus), il trouve l'aire de la section de parabole, mais aussi une relation mathématique permettant d'obtenir ces poids (et donc ces aires) par calcul plutôt que par mesure. Il y parvient au moyen de sommes de « nombres » dans lesquelles on reconnaîtra une amorce au calcul différentiel. Ce faisant, Archimède va au-delà de l'intuition offerte par l'observation du monde physique et fait des théories mécaniques des outils mathématiques pour prouver certaines propositions, essayant autant que possible de les cadrer dans les méthodes géométriques de l'époque. Il ne s'en contente cependant pas et c'est pourquoi après avoir illustré certains théorèmes par la mécanique, il s'efforce de les prouver mathématiquement :

> La recherche de la démonstration précédée d'une certaine connaissance des questions par cette méthode [mécanique], est, en effet, plus aisée que sa recherche sans cette connaissance. Et c'est ainsi que, pour ce qui concerne les propositions relatives au cône et à la pyramide [...] l'on doit attribuer une part non négligeable à Démocrite qui, le premier, a affirmé les choses, sans démonstration [...] En effet, je suis persuadé qu'à la faveur de cette méthode, une fois qu'elle aura été exposée, d'autres propositions, qui ne se sont pas encore présentées à moi-même, seront trouvées par d'autres. (Archimède, dans Ver Eecke, 1960, pp. 478-479)

Archimède établie donc une distinction entre le fait de *montrer* une proposition mathématique, la rendre visible, sensible, et celui de la *démontrer,* la rendre intelligible, sensé. S'excusant d'énoncer des propositions dont la preuve mathématique reste à faire, il insiste néanmoins sur l'apport d'une méthode passant par la physique afin de découvrir des théorèmes à prouver rigoureusement. Ainsi s'attarde-t-il à démontrer géométriquement des théorèmes d'abord présentés en considérant des propriétés mécaniques (*e.g.,* un centre de gravité), ou des évidences physiques (*e.g.,* les côtés d'un prisme droit sont parallèles), fournissant parfois plusieurs propositions du même théorème présentant un degré croissant de pureté mathématique.

On retient d'Archimède l'idée d'une physique au service des mathématiques dont le pouvoir évocateur dénote une irréconciliable séparation entre ces disciplines. L'action de mettre en œuvre les idées mathématiques dans des configurations aux propriétés physiques évocatrices de relations mathématiques permet d'entrevoir des vérités mathématiques qu'il faudra néanmoins démontrer. Son travail suggère de distinguer la réalité sensible de la vérité mathématique, de sorte que chacune soit porteuse de ses propres causes et définitions, et faisant de la métaphore une voie privilégiée permettant de concevoir *à partir* du monde sensible des entités *à part* de celui-ci.

Gilles Châtelet (1944-1999) : la provocation du physico-mathématique

Dans son texte à propos de la géométrie non-euclidienne et de la physique, Einstein (1926) retrace rapidement l'histoire de la géométrie, expliquant comment elle s'est peu à peu transformée en une « science mathématique [indépendante] de ses fondements empiriques » (pp. 1-2). Il explique ensuite comment le travail de mathématiciens et de physiciens a conduit à retrouver l'indissociabilité de la géométrie et de la physique par laquelle elles se fondent en une seule entité. Différente des positions précédentes, cette perspective fait l'objet d'un travail de fond de la part de Châtelet (1993), dont le travail gagne en popularité en didactique des mathématiques (*e.g.,* Bautista et Roth, 2012; de Freitas et Sinclair, 2013).

Châtelet (1993) propose une vision unifiée des disciplines. Montrant comment l'une répond aux mouvements de l'autre, il dresse le portrait historique de leurs relations convergentes ou divergentes en tant qu'*opérations de l'esprit* prenant leurs sources chez Aristote. En ordonnant les disciplines (antériorité logique des mathématiques et substantielle de la physique), Aristote attire tant l'attention sur l'établissement d'un terrain à explorer pour chacune d'elles (l'abstrait aux mathématiques, le concret à la physique) qu'il fait perdre de vue que toutes deux évoluent autour de « problématiques communes » (p. 23). Cet oubli, résultant en une distanciation conceptuelle des disciplines, est encore perceptible dans la plupart des épistémologies actuelles [4].

Châtelet s'intéresse à cette inséparabilité et à l'idée selon laquelle chacune de ces disciplines évolue autour de problématiques communes en y portant cependant un regard particulier, chacune abordant « les questions à sa manière, sans se sentir menacée par ses rivales » (p. 23). Il dénonce en effet non seulement la volonté d'émancipation mutuelle de la physique et des mathématiques portée par certains, mais surtout le rapport hiérarchique, voire prédationniste, qui découle de cette distanciation : « Certains débats contemporains ne semblent concevoir [...] que des rapports de servilité ou de perpétuelle bouderie, en oubliant qu'en Occident, depuis vingt-cinq siècles, [...] la mathématique et la physique se sont toujours (bon gré mal gré) accompagnées » (pp. 22-23).

Ainsi, il n'est pas question pour Châtelet de subordination entre physique et mathématiques, suivant une dominance soutenue par la nature des objets ou les finalités à leurs attribuer. Il ne s'agit ni d'emprunter ni d'appliquer des mathématiques ou de la physique à l'une ou l'autre, dans un rapport utilitariste niant les transformations réciproques nécessaires à garder actives, vivantes et en plein développement les disciplines. Châtelet ne propose pas non plus que le travail dans une discipline conduise à une meilleure compréhension de l'autre. Il insiste plutôt sur la manière dont elles *se transforment* l'une l'autre en provoquant l'élargissement de leurs champs d'action. La discussion que fait Châtelet du travail d'Oresme permet d'illustrer ces propos.

Au 14e siècle, Oresme, travaillant sur le « mouvement du mouvement », cherche à calculer la distance parcourue par un corps dont la vitesse est en continuel changement. Ce phénomène physique pose le problème de se laisser saisir par les sens en imposant de considérer plusieurs dimensions (le temps, la distance parcourue, le changement de vitesse, la comparaison de différentes vitesses) et se complexifie par la mise en œuvre d'un appareillage permettant de faire des mesures. Oresme y parvient en calculant la distance parcourue par une représentation ingénieuse (Figure 1). Dans les trois cas, la distance parcourue correspond à l'aire de ce que Châtelet appelle *déformation* d'un rectangle étalon (à gauche), qui devient un triangle ou un trapèze par exemple.

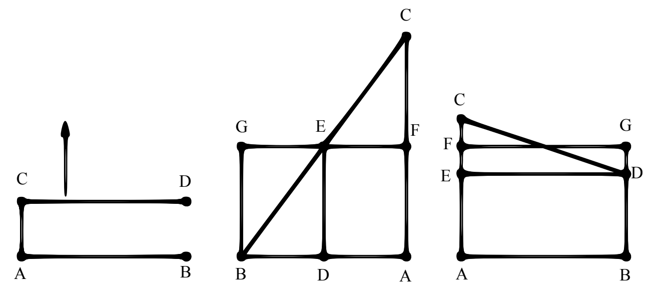

Figure 1. Diagramme d'Oresme : un segment (partant de C) représentant la vitesse se déplace horizontalement selon l'intervalle de temps considéré (AB). Les mouvements sont caractérisés par la déformation du rectangle étalon (gauche) (de gauche à droite: vitesse constante, accélération et décélération constante).

Châtelet explique que le travail mathématique d'Oresme transforme les concepts de rectangles et de triangles, et qu'en même temps ces concepts géométriques changent (et enrichissent) les notions physiques de temps, distance, déplacement, *etc*. Les figures, dit Châtelet, ne sont plus statiques, mais dynamiques : elles se déforment pour répondre aux changements de vitesse. Elles gagnent élasticité et mobilité, leur permettant de participer à la compréhension d'un phénomène au lieu d'être simplement le produit fini d'une compréhension (Sinclair *et al.,* 2013), et c'est toute une (nouvelle) géométrie de morphismes qui voit le jour. De façon plus immédiate, analyse Châtelet, la relation entre les aires des figures (correspondant aux distances parcourues) trouble les positions mathématiques de l'époque sur les infinitésimaux, contribuant à l'émergence d'un nouveau champ des mathématiques qui s'affirmera plus tard. De son côté, le physicien a accès à de nouvelles relations (entre vitesses), et une manière de s'intéresser à d'autres phénomènes échappant aux sens, comme le concept de force qu'on retrouvera au cœur du travail physico-mathématique de Newton, par exemple.

Cette manière de concevoir le monde nous entourant, résultant d'un éveil de potentialités latentes, un élargissement des champs, une explosion dans laquelle les deux disciplines se provoquent mutuellement, Châtelet (1987) la qualifie de « physico-mathématique » :

> L'objet qu'on a en face de soi, ce n'est jamais un objet « physique », ce n'est jamais un objet mathématique, c'est toujours un objet physico-mathématique. Et faire de la physico-mathématique c'est trouver une forme d'adéquation entre les virtualités mathématiques de la chose et les complexes expérimentaux avec lesquels je peux faire exploser [cet objet]. (p. 11)

Un retour sur quelques travaux en didactique des mathématiques

À la lumière de ces visions entre mathématiques et physique, je reviens sur certains travaux mentionnés en introduction. Je propose quelques rapprochements possibles entre ces travaux et les épistémologies qui viennent d'être présentées, y voyant d'abord l'occasion de développer un fondement épistémologique pour les travaux s'intéressant à mettre à profit les liens entre physique et mathématiques. Du même coup, je propose de remettre en question ces travaux au moyen de réflexions épistémologiques telles qu'amorcées ici.

Hanna et Jahnke

Hanna et Jahnke (2002) entrevoient l'idée d'employer dans les preuves mathématiques des principes relevant de la physique (*e.g.,* l'unicité du centre de gravité) en les *considérant* comme des axiomes ou des théorèmes. Argumentant que l'utilisation de ces concepts permet un éclairage nouveau et intuitif à des théorèmes mathématiques, ils proposent d'amener d'abord les élèves à observer à partir d'outils empruntés à la physique que les médianes d'un triangle se croisent en un même point, pour ensuite comparer cette « preuve » avec une preuve traditionnelle dite purement mathématique.

Cette proposition rappelle les écrits d'Archimède discutés précédemment (cité dans Hanna et Jahnke, 1999, 2002). En effet, en cherchant à expliquer ce qu'ils entendent par « arguments from physics within mathematical proofs » (Hanna et Jahnke, 1999, p. 872), par l'entremise d'histoires de mathématiciens servant à exemplifier leur propos, ils concluent que cette approche « led to considerable progress in the calculus of variations » (Monna, 1975, dans Hanna et Jahnke, 1999, p. 873). Ce point de vue conforte la vision d'Archimède. Cependant, lorsqu'ils donnent des exemples de manifestations en éducation de l'application de la physique en mathématiques, ils expliquent que les preuves découlant de l'étude de phénomènes ne sont pas moins rigoureuses que celles obtenues par démonstrations mathématiques. La physique n'est alors pas simplement un outil orientant la démarche permettant de prouver un théorème, mais un *complément* à ces démonstrations permettant aux mathématiques de prendre un sens. Cette affirmation indique une séparation avec Archimède, mais ne remet pas en question la séparation posée par Aristote entre connaissance du monde sensible et vérité mathématique. Placer dans l'observation du monde physique le sens des idées mathématiques évoque aussi Aristote et sa distinction entre le pourquoi et le comment des phénomènes mathématiques. Dans quelle mesure la relation entre physique et mathématiques mise en œuvre se rapproche-t-elle de la perspective épistémologique de ce dernier lorsqu'il trouve incarnés dans le monde physique des phénomènes mathématiques qu'il s'agit d'extirper?

Un rapprochement timide avec la vision de Châtelet se dessine néanmoins. En effet, considérer sur le même plan les preuves physiques et mathématiques suggère de rompre avec le rapport de préséance et ouvre vers l'idée que les deux disciplines s'intéressent, chacune à sa manière, aux mêmes phénomènes. Mais en se limitant à vouloir améliorer la compréhension des idées mathématiques, Hanna et Jahnke passent à côté de l'élément essentiel de la pensée de Châtelet : la *transformation* des disciplines provoquée par le physico-mathématique.

On peut imaginer cette transformation dans le contexte scolaire à partir de certains propos des auteurs. Hanna et Jahnke (2002) avancent l'idée qu'une vision holistique de preuves mathématiques puisse être produite par une étude physique: « using an argument from physics may also help create a "holistic" version of a proof, one that can be grasped in its entirety » (p. 1). Cette vision suggère que le travail en physique fait plus que guider vers une preuve mathématique, plus même que de rendre convaincant tel résultat en montrant pourquoi ça marche. Elle propose que la physique « sorte » la preuve d'elle-même, qu'elle conduise à transformer le monde mathématique de l'élève en lui permettant de saisir la preuve dans son entièreté pour la considérer un nouvel objet du monde mathématique, essentiel du point de vue mathématique. Prise comme un tout, la preuve apparaît dans un paysage mathématique provoqué par la physique comme un phénomène *justifié* par l'observation du monde sensible et appartenant d'office au nombre des objets dont les mathématiques *doivent* s'occuper. La découverte du centre de gravité d'un triangle fait « exploser » (comme dirait Châtelet) la figure en lui donnant tout à coup un nouveau point auquel s'intéresser, à capturer mathématiquement. Point qui une fois saisi, compris, pourrait bien ouvrir à de nouvelles idées mathématiques, comme celle de l'inscription du triangle dans un cercle.

Tanguay et Geeraerts

Cette provocation des mathématiques par la physique est davantage marquée dans le travail de Tanguay et Geeraerts (2012) qui proposent d'étudier la géométrie à la manière de la physique expérimentale. En tentant de réhabiliter le rôle de la mesure, ces chercheurs mettent de l'avant la difficulté à passer d'une géométrie du perceptible à une géométrie axiomatique formaliste. C'est reconnaître dans la démarche du physicien, dans la mesure empirique et l'observation expérimentale, une source fertile pour la production d'idées mathématiques *nouvelles* du point de vue de ceux en faisant l'expérience.

Cependant, les auteurs sont portés à réduire la contribution du travail en physique à une meilleure compréhension (de la preuve) en mathématiques. Ils expliquent comment la géométrie du physicien-géomètre vise le passage chez les élèves du perceptible à l'axiomatique, qui s'érige comme finalité. On y rencontre donc une vision utilitariste de la relation entre mathématiques et physique présente chez Archimède. Faisant dominer en importance le raisonnement mathématique à la compréhension du monde sensible, on reconnaît une posture épistémologique proche de celle d'Aristote au sens où on cherche à dégager du sensible les idées mathématiques que la mesure révèle. Il est toutefois intéressant de noter le pouvoir *évocateur* des résultats de la physique, qui semble jouer un plus grand rôle : il s'agit moins de situer dans le physique l'origine des concepts mathématiques que d'y former certaines intuitions, comme c'est le cas chez Archimède. Mais il ne faut pas oublier que les objets dont Tanguay et Geeraerts prétendent se préoccuper sont des objets *mathématiques* en eux-mêmes. C'est la mesure répétée des *angles* internes de triangles qui conduira à vouloir une preuve du résultat généralement observé concernant leur somme qui les intéressent, et non pas, par exemple, l'observation que trois copies d'un même triangle peuvent toujours s'aligner à manière de la Figure 2.

La nuance illustrée entre les propos d'Archimède et ce dont parlent Tanguay et Geeraerts, quand ils souhaitent

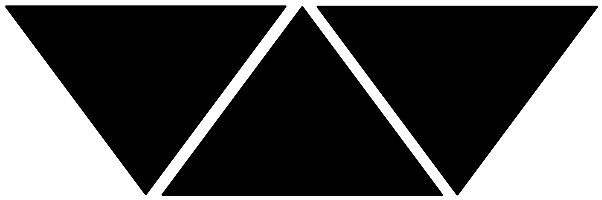

Figure 2. *L'alignement remarquable de trois objets triangulaires identiques.*

s'inspirer de la démarche en physique pour travailler sur des objets mathématiques, est en bonne partie épistémologique. Alors qu'Archimède, comme Aristote, se refuse l'accès direct aux objets mathématiques et considère leurs représentations comme des phénomènes physiques, Tanguay et Geeraerts semblent envisager les *figures* (mathématiques) comme des représentants directes des entités mathématiques (une distinction bien connue par opposition au *dessin*, par exemple, qui n'est pas présenté et traité *qua* des propriétés géométriques que l'on y fait figurer). Cette discussion manque, hélas, à leur travaux. Elle manque d'autant plus qu'elle permettrait peut-être de faire basculer leur conceptualisation des liens entre physique et mathématiques du côté de ce que Châtelet propose. La notion de figure repose en effet précisément sur l'unicité du physico-mathématiques, montrant combien mathématiques et physique sont inséparables. La preuve d'existence d'une entité mixe montre que les deux disciplines se touchent, s'interpénètrent. Ces points de contact, ces lieux (en) communs sont au cœur du travail de Châtelet, qui parle plus précisément du cas des diagrammes. Le diagramme, comme la figure, est une trace dans le monde physique dont l'épaisseur provoque des possibilités que l'objet mathématique qua mathématique ne permet pas d'envisager. C'est ainsi *l'inexactitude* de la mesure physique aussi bien que *l'épuisement* d'une approche tant soit peu systématique de différents cas de figures qui demande aux mathématiques de relayer la physique dans la connaissance de ces objets qui sont bel et bien matériellement constitués, mais en même temps exemplaires, et donc idéaux.

Radford, Savage et Roberge

Radford, Savage et Roberge (2002) s'intéressent, à partir d'une séquence d'enseignement mettant à profit le phénomène de la chute des corps et les fonctions, à la manière dont se développe le discours scientifico-mathématique à partir de la rencontre du vécu quotidien et de la rigueur présente en mathématiques. Les élèves ayant préalablement et séparément abordé les idées physiques et mathématiques en jeu, c'est la rencontre de l'expérience sensible du rebondissement d'une balle et du travail sur les fonctions affines et non affines qui intéresse les chercheurs. En ce sens, on peut reconnaître en partie la posture d'Aristote qui marie mathématiques et physique avec l'idée de comprendre *comment* les mouvements observés se produisent sans nécessairement vouloir en donner la raison (le pourquoi). Des élèves reconnaissant comme observable le phénomène de la chute des corps et mettant à profit leurs outils mathématiques (concepts de fonctions, graphiques, tables de valeurs) dans une investigation du phénomène physique cherchent d'une certaine manière à voir "au-delà" des objets et de leur propriétés spécifiques des régularités et/ou des différences cachées.

Par contre, lorsque les chercheurs discutent de la construction du discours scientifico-mathématique des élèves, on sent davantage Châtelet, qui insiste sur la non séparation du physique et du mathématique. En effet ils relèvent divers moments où les élèves se projettent dans des « expériences [...] hypothétiques » (p. 15) qui rappelle l'adéquation entre le virtuel et l'actuel discutée par Châtelet, plutôt que d'insister sur les éléments relevés par l'expérience empirique.

Les chercheurs n'approfondissent pas, hélas, cette idée d'emprunts à des expériences de pensées qui mettent en jeu le va-et-vient entre travail mathématique (dans les graphiques) et physique (l'expérimentation). La traduction graphique des données empiriques amènent de nouvelles considérations mathématiques qui conduisent à revoir les in/certitudes de l'expérience physique. Quand un élève remarque « Vraiment la masse n'a rien à faire. Parce que tu pourrais échapper un avion puis un cube [...] puis l'avion "gliderait" [mais] le cube ferait rien que tomber » (p. 15), les auteurs notent qu'il est difficile de parler d'une « meilleure compréhension » du phénomène. Par contre, nous pouvons penser que le travail physico-mathématique dans son ensemble gagne en épaisseur. C'est *là* que se développe le discours scientifico-mathématique dont il est question, par un élargissement du champ de ce qui est physiquement ou mathématiquement pris en compte.

Comme l'explique Châtelet, le travail dans l'une des disciplines transforme nécessairement l'autre. Ainsi, on voit comment le travail mathématique présent dans l'activité oblige les élèves à reconsidérer la physique telle qu'ils la comprennent. Il ne reste qu'à se demander comment ce type d'activité pourrait être regardé en termes d'une transformation du champ mathématique (des élèves) grâce à l'observation. Viennent à l'esprit les nombreux travaux s'intéressant à l'interdisciplinarité sous toutes ses facettes, tels que rapportés par Pang et Good (2000), qui proposent notamment de faire travailler les élèves dans l'optique de « découvrir » par l'observation d'un phénomène physique un type de régularité nouveau pour eux (*e.g.,* quadratique).

Il faut voir cependant qu'une telle intégration des sciences et des mathématiques ne répond pas pleinement à la proposition de Châtelet. La métaphore de l'intégration ou de l'interdisciplinarité suggère une séparation fondamentale des disciplines mises en contact là où Châtelet appelle à y voir une unité profonde. La relation dialectique entre interprétation (mathématique) et compréhension (du phénomène physique) décrite par Radford pourrait représenter cette unification physico-mathématique. Pris sous cet angle, une lecture attentive des analyses peut conduire à des suggestions relatives à cette unité sur le plan pédagogique. En même temps, le discours physico-mathématique n'est pas l'élément le plus explicite du travail de Châtelet, qui discute plutôt du rapport aux *traces* de façon plus générale. Mais les travaux récents de de Freitas et Sinclair (2014) ou de Roth et Maheux (2015) sur l'inséparabilité du mathématique et de la « matière » avec laquelle on en fait l'expérience par une gestuelle particulière ouvrent en ce sens. Le défi, en reprenant ces écrits, sera par contre de montrer le lien entre les propos de Châtelet concernant le physico-mathématique et ce qui est repris de ses observations sur les diagrammes pour penser le travail mathématique des élèves.

Conclusion

Dans cet article, j'ai présenté trois perspectives distinctes concernant des relations envisageables entre mathématiques et physique : celle d'Aristote, d'Archimède et de Châtelet. Celles-ci offrent l'occasion de développer un fondement épistémologique pour les travaux s'intéressant à mettre à profit les liens entre physique et mathématiques. D'un autre côté, la nature épistémologique de ce travail vient troubler ces postures, creusant au-delà des clichés que l'histoire a laissé choir sur les philosophes en question. Le choix de puiser chez Aristote, Archimède et Chatelet, repose en partie sur un désir d'aller au-delà de ces clichés et sur l'intérêt grandissant récemment porté au travail de Châtelet en didactique des mathématiques.

De même, je me suis penché, parmi d'autres, sur trois exemples de recherches explorant la rencontre des mathématiques et de la physique. L'analyse présentée montre que ces recherches évoquent les postures épistémologiques d'Aristote, d'Archimède et de Châtelet sans se borner à l'une ou à l'autre. Si ces recherches rappellent par moments ces perspectives, elles peuvent aussi être *ré-interprétées* à travers le regard épistémologique développé dans cet article. C'est dans cet esprit que je me suis attardé à mettre en valeur les idées de Châtelet, en partie parce que son travail est à la fine pointe des conceptualisations courantes concernant les relations entre mathématiques et physique, mais aussi parce qu'il est de plus en plus présent dans notre domaine.

Ce travail cherche à encourager l'engagement sur le plan épistémologique afin de générer de nouvelles questions. Si le lecteur devait ne retenir qu'une chose de celui-ci, j'aimerais que cela touche la puissance et la richesse d'une approche épistémologique de ces questions. Je partage en ce sens la proposition de Proulx et Maheux (2012) de garder au cœur de la recherche en didactique des mathématiques les questions épistémologiques relatives à la nature de la connaissance. De plus, ce travail fait ressortir l'idée de positionner mathématiques et sciences à égalité, faisant en sorte que le travail dans l'une des disciplines puisse bénéficier à l'autre, sans toutefois que l'une soit conçu dans un rapport de servitude. Cette vision marque un détachement avec les perspectives grecques étudiées précédemment. La question se pose alors : quelle épistémologie permettrait de la soutenir ?

Notes

[1] On notera aussi que je limite cet article à certains aspects de la question regardé du point de vue épistémologique. Un travail à partir des observations d'épistémologues tels que Piaget (1970) ou Lakoff et Núñez (2000), par exemple, aurait conduit à un tout autre type d'analyse.

[2] D'autres grandes figures auraient pu être convoquées, à commencer par Husserl (2010), Newton, Platon, Vygotsky, Michel Serres, Alfred Tarski ou même Stephen Wolfram, sans compter tout ceux dont le discours sur les sciences ou les mathématiques pourrait être revisité sous cet angle (Descartes, Kant, *etc.*).

[3] Cette notation signifie Aristote, Livre XIII, Chapitre I, Paragraphe 12.

[4] Le constructivisme radical de von Glasersfeld (*e.g.,* 1995) en est un bon exemple, où l'expérience du monde est ontologiquement séparée des structures cognitives auxquelles il donne lieu.

Références

Aristote (1830) *Logique d'Aristote, Tome II.* (Saint-Hilaire, J.B., trad.). Paris, France: Ladrange.

Aristote (1842) *Logique d'Aristote, Tome III.* (Saint-Hilaire, J.B., trad.). Paris, France : Ladrange.

Aristote (1862a) *Physique d'Aristote; ou, leçons sur les principes généreaux de la nature, Tome I.* (Saint-Hilaire, J.B., trad.). Paris, France : A. Durand/Ladrange.

Aristote (1862b) *Physique d'Aristote; ou, leçons sur les principes généreaux de la nature, Tome II.* (Saint-Hilaire, J.B., trad.). Paris, France : A. Durand/Ladrange.

Aristote (1879) *Métaphysique d'Aristote, Tome III.* (Saint-Hilaire, J.B., trad.). Paris, France : Germer-Baillière.

Bautista, A. & Roth, W.-M. (2012) The incarnate rhythm of geometrical knowing. *Journal of Mathematical Behavior* **31**(1), 91-104.

Châtelet, G. (1987) L'enchantement du virtuel. *Revue Chimère* **2**. Disponible au site www.revue-chimeres.fr/drupal_chimeres/?q=taxonomy_menu/3/15&page=1

Châtelet, G. (1993) *Les enjeux du mobile : mathematique, physique, philosophie.* Paris, France: Seuil.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2013) New materialist ontologies in mathematics education: the body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **83**(3), 453-470.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014) *Mathematics and the Body: Material Entanglements in the Classroom.* New York, NY: Cambridge University Press.

Einstein, A. (1926) Géométrie non-euclidienne et physique (traduction). *Revista Matematica Hispano-Americana,* serie 2, p. 72-76.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1999) Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. Dans Zaslavsky, O. (Ed.) *Proceedings of the Twenty-Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, pp. 73-80. Haifa, Israel: PME.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (2002) Another approach to proof: arguments from physics. *ZDM* **34**(1), 1-8.

Heath, T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics II.* Oxford, UK: Clarendon Press.

Husserl, E. (2010) *L'origine de la géométrie.* Paris, France : Presse Universitaires de France.

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000) *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings mathematics into Being.* New York, NY : Basic Books.

Pang, J. S. & Good, R. (2000) A review of the integration of science and mathematics: implications for further research. *School Science and Mathematics* **100**(2), 73–82.

Peyrard, F. (1807) *Oeuvres d'Archimède.* Paris, France : Bachelier

Piaget, J. (1970) *L'épistémologie génétique.* Paris, France : Presses Universitaires de France.

Proulx, J. et Maheux, J. F. (2012) Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics* **32**(2), 42-47

Radford, L., Savage, M. et Roberge, L. (2002) Évidence, interprétation et argumentation scientifique : une activité en 9e année au sujet de la chute des corps. Pre-prints École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, Ontario, Canada, No. 4/2002. Disponible au site http://luisradford.ca/luisradford/?page_id=13#2002

Ricard, D. (1844) *Les vies des hommes illustres par Plutarque, Tome 1.* Paris, France : Didier.

Roth, W.-M. (2014) *Graphing and Uncertainty in Discovery Work: Implications for and Applications in STEM Education.* Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Roth, W.-M. & Maheux, J.-F. (2015) The visible and the invisible: mathematics as revelation. *Educational Studies in Mathematics* **88**(2), 221-238.

Sinclair, N., de Freitas, E. & Ferrara, F. (2013) Virtual encounters: the murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM* **45**(2), 239-252.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012) D'une géometrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x* **88**, 5-24.

Ver Eecke, P. (1960) *Les oeuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon, Tome 2* (2e édition). Liège, Belgique : Vaillnat-Carmanne.

von Glasersfeld, E. (1995) *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning.* London, UK : Falmer.