Quelques problèmes d'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire*

COLETTE LABORDE

* Cet article est issu de présentations faites à l'occasion de diverses rencontres (écoles d'été en France, ICME 5, 9e conférence PME) et de réflexions menées dans le cadre d'un project grenoblois concernant l'apprentissage de la symétrie orthogonale au collège en France (élèves de 11 à 15 ans).

Cet article ne recense pas de façon systématique l'ensemble des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. De telles synthèses, marquées chacune évidemment de la problématique de leur auteur ont été faites à plusieurs reprises. Je citerais par exemple une des dernières en date "Space and Geometry" de Bishop [1983]. Le propos de cet article cherche plutôt à poser un ensemble de questions relatives à l'acquisition de connaissances spatiales et géométriques et à leur enseignement, à l'intérieur d'un cadre théorique d'inspiration très française, au sens où ce cadre sous-tend de nombreuses recherches françaises dans le domaine de la didactique des mathématiques, c'est à dire de l'étude des processus d'acquisition et de transmission des connaissances mathématiques en situation scolaire.

I- Proposition d'un cadre d'analyse

L'enseignement a pour objectif de faire acquérir un certain ensemble de savoirs à des apprenants, les élèves. Un problème central consiste à déterminer quels sont les moyens à mettre en œuvre en classe pour permettre un apprentissage de ces savoirs, en l'occurrence des savoirs géométriques. Mais vouloir résoudre ce problème nécessite

—de choisir au préalable les savoirs que l'on désire faire approprier aux élèves

—de connaître les modes de développement cognitif des élèves, l'état de leurs connaissances antérieures à l'enseignement, les possibilités d'évolution de ces connaissances.

I-1 Quels contenus d'enseignement en géométrie?

La détermination des contenus "officiels" d'enseignement se fait non seulement en fonction des savoirs savants [Chevallard, 1985] au sein de la communauté des mathématiciens mais aussi en fonction des savoirs culturels et sociaux de la société au sein de laquelle a lieu le projet éducatif.

Cette double origine des contenus d'enseignement s'est exercée dans le cas de la géométrie de façon souvent conflictuelle, le plus souvent une dichotomie a été établie entre l'étude de l'espace d'une part et *une* géométrie des mathématiciens d'autre part: d'un côté l'étude des rapports de l'homme avec l'espace, qui recouvre les problèmes de perception, de représentation des objets physiques dans l'espace ainsi que la modélisation des actions et des opérations sur ces objets; de l'autre côté la géométrie en tant que lieu privilégié d'une rationalité poussée à son point d'excellence.

Le paragraphe II est consacré à cette dualité de l'origine des savoirs en géométrie et à son influence sur la détermination des contenus d'enseignement en géométrie.

I-2 Les connaissances géométriques et spatiales des élèves

En nous plaçant dans un cadre constructiviste de constitution des connaissances nous considérons que tout individu en situation d'apprentissage construit ses propres conceptions des contenus sur lesquels porte l'apprentissage. Ces conceptions sont fragmentaires, incomplètes, parfois partiellement erronées. Elles permettent aux élèves de résoudre correctement un certain ensemble de problèmes mais ne fonctionnent plus out fonctionnent mal sure d'autres problèmes. Dans le cas de la géométrie, il nous paraît important non seulement de connaître les conceptions des élèves mais aussi de délimiter leur domaine de validité.

Les études de type psychologique déjà anciennes en particulier les recherches piagétiennes apportent de nombreux résultats relatifs à la construction de l'espace chez l'enfant du point de vue psychogénétique. Des recherches plus récentes ont cherché à dégager les conceptions des élèves à propos de contenus géométriques d'enseignement comme par exemple les transformations géométriques.

Mais ces conceptions sont non seulement le résultat d'interactions avec les objets d'enseignement au sein de la classe mais aussi de constructions sociales et culturelles en dehors du contexte scolaire. L'influence de l'environnement extérieur à la classe est évidente dans le cas de notions spatiales et doit aussi être prise en compte dans l'enseignement.

Ces différents points font l'objet du paragraphe III

I-3 Quels moyens mettre en oeuvre pour un apprentissage de la géométrie?

Nous considérons que les problèmes jouent un rôle fondamental dans l'acquisition des connaissances [Vergnaud, 1982]:

—d'un point de vue épistémologique, la génèse d'un concept mathématique prend très souvent sa source dans un ensemble de problèmes pour lesquels il constitue un instrument efficace de solution

—dans l'approche constructiviste dans laquelle nous nous plaçons, la construction des connaissances se fait en grande partie grâce à des interactions entre sujet et objets (de quelque type qu'ils soient, concrets ou abstraits). Ces interactions apparaissent de façon privilégiée lorsque l'individu est confronté à un problème. Lors de la résolution d'un problème il fait fonctionner ses connaissances antérieures, les met à l'épreuve et éventuellement les modifie ou même les rejette si elles se révèlent inefficaces ou trop coûteuses [Brousseau, 1983a]. Une question importante en découle pour l'enseignement de la géométrie: *à quels problèmes les connaissances géométriques apportent elles une solution?*

D'autres questions se posent ensuite dans la réalisation de l'enseignement: dans quel type de situations insérer les problèmes retenus pour que d'une part ils soient accessible aux élèves, d'autre part ils permettent effectivement un apprentissage, c'est à dire une évolution des conceptions des élèves vers un état final souhaité.

Le paragraphe IV aborde ces questions.

II- Double origine de la géométrie enseignée

Comme il a déjà été dit, la géométrie enseignée trouve sa source à la fois dans la géométrie développée au cours du temps par les mathématiciens et dans des savoirs culturels et sociaux, issus de pratiques diverses (arpentage, architecture, ...) mettant en jeu l'espace physique dans lequel vit l'homme. Une dichotomie a pu être établie entre ces deux origines, en particulier par les mathématiciens; elle peut être décrite en termes d'oppositions:

—l'opposition intuition — déduction
—l'opposition construction — démonstration
—l'opposition spatial — numérique

II-1 L'opposition intuition — déduction

Cette opposition entre intuition et déduction est le fruit d'un héritage culturel de la période grecque classique, où la géométrie n'est plus la théorie des rapports de l'homme à l'espace mais le lieu privilégié de la rationalité.

Le débat qui a eu lieu à cette époque sur la place de la géométrie montre la dichotomie faite alors entre ce qui est du domaine de la sensibilité, de la perception et ce qui est du domaine des choses de l'esprit: fallait-il mettre la géométrie du côté des choses sensibles ou du côté des choses intelligibles [débat rapporté par Proclus dans ses commentaires des Eléments d'Euclide et cité par Tannery 1887, p. 38].

Depuis la période grecque classique, le discours dominant en géométrie a donc cherché à créer une dichotomie entre d'une part ce qui relèverait de l'"intuitif" qu'on ne peut mettre en théorie et possédant une certaine irrationnalité et d'autre part ce qui relèverait du rationnel n'ayant aucun lien avec le monde réel ou du moins dont les seuls liens consistent en des évidences physiques, prises pour des points de départ, à partir desquelles la géométrie se développerait de façon indépendante suivant ses propres règles [Brunschvicg, 1947, p. 93-98, Vernant, 1962].

Cette méthode de la géométrie, souvent explicitée, est devenue la méthode des mathématiques parce que l'ordre géométrique est "véritable" [cf. par exemple Pascal, 1657, dans son opuscule "de la méthode des démonstrations géométriques, c'est à dire méthodiques et parfaites," d'Alembert dans les articles "géomètre" et "géométrie" de son encyclopédie].

Ces données d'évidence sur lesquelles est fondée la géométrie déductive ont été conçues soit comme issues d'une réalité extérieure au sujet appréhendée directement [correspondant à ce que Piaget, 1949, p. 150, appelle la théorie du primat de l'objet], soit comme issues de la seule élaboration du sujet imposant son interprétation aux phénomènes objectifs dès le contact perceptif le plus élémentaire (point de vue correspondant à ce que Piaget appelle la théorie du primat du sujet).

Cette opposition intuition — déduction a évidemment connu des nuances au cours du temps, mais de façon générale les seuls liens qu'elle a établis entre le monde sensible et le monde de la rigueur relèvent de l'évidence et du naturel. Comme l'écrit Gonseth, dans l'introduction à "la géométrie et le problème de l'espace" [1945], "la distinction entre l'idéal et le réel peut s'installer en nous comme un simple élément de connaissance. Sans que nous y prenions garde, elle peut se joindre, comme un ombre à tous les objets de la connaissance spatiale. Pourqoui feraitelle naître une question ou un remords? L'ombre qui suit tous nos pas ne nous gêne guère, à moins que nous avisions de sauter plus loin qu'elle. De même tant que l'idée pourra se tenir aux côtés de la connaissance primaire de l'objet sans que celle-ci cesse d'être sûre d'elle-même, le problème de la connaissance et tout spécialement le problème de l'espace pourront rester latents."

II-2 L'opposition construction — démonstration

Dans le même esprit, les démonstrations ont été opposées aux procédés d'obtention des figures. La démonstration parce qu'elle procède de règles d'une logique intangible est considérée comme indépendante des figures ("ce ne sont pas les figures qui donnent la preuve chez les géomètres" écrit Leibniz dans les Nouveaux Essais). En revanche les figures sont les résultats de procédés de construction liés au sujet qui les produit.

Cette dichotomie, issue également de l'école grecque, entre le savoire-faire et le savoir, l'ingénieur et le mathématcien [Tannery 1887, p. 158] persiste longtemps; elle apparaît ainsi au XVIIe et au XVIIIe siècles dans les différences de dénomination entre les ouvrages de géométrie classique (les Eléments d'Euclide) et les nombreuses géométries pratiques qui traitent de problèmes d'arpentage, de toisé, d'architecture et qui souvent donnent des procédés de constructions sans justification et même parfois approchés sans qu'il soit fait mention de ce caractère approché.

Cette séparation entre démonstration et construction exclut la présence d'une dialectique entre dessin et démonstration: le dessin ne peut remettre en cause la démonstration.

II-3 L'opposition spatial — numérique

D'une part la géométrie traditionnelle avant l'époque de son algébrisation était essentiellement de nature qualitative [Brunschvicg, 1947, p. 97]. D'autre part l'opposition entre le spatial et le numérique connaît différents aspects:

—le domaine des nombres paraît être de nature entièrement conceptuelle alors que les phénomènes spatiaux sont liés à la perception et au tracé.

—les objets géométriques sont présentés comme des abstractions d'objets physiques, alors que l'existence et les propriétés des nombres ne semblent pas trouver leur origine dans les objets eux-mêmes mais dans les opérations sur ces objets: les nombres entiers sont des invariants attachés à une collection d'objets lorsqu'on déplace ces derniers.

—l'écriture du nombre fonctionne comme un symbole, alors que des dessins d'objets spatiaux ont une fonction représentative du réel.

II-4 Conséquences sur la détermination des contenus d'enseignement

Cette séparation entre une géométrie de l'espace liée au sujet et une géométrie théorique se traduit dans les contenus d'enseignement (du moins en France jusqu'à maintenant (1)):

—par une rupture entre une géométrie d'observation, mettant en jeu le tracé de figures et l'usage d'instruments destinés aux élèves les plus jeunes et une géométrie de la déduction pour les élèves plus âgés. Ainsi, en France, dans les programmes de l'école secondaire de 1977, la géométrie ne commence qu'en 4e (élèves de 13 ans) avec l'apprentissage de la démonstration, alors que dans les classes précédentes n'est prévue qu'une "observation d'objets physiques et géométriques," qui "n'est pas à proprement parler une activité mathématique" comme le précisent les commentaires officiels des programmes. D'autre part parce qu'un objectif à long terme de l'enseignement est bien l'apprentissage de la géométrie de la déduction, les objets géométriques introduits dans l'enseignement avant l'apprentissage de la démonstration sont justement ceux sur lesquels opéreront plus tard les démonstrations. Leur introduction ne répond donc qu'à une necessité interne à l'enseignement et non pas à la construction par l'élève de connaissances spatiales.

La question se pose de savoir si pour les élèves les objets géométriques de l'observation sont les mêmes que ceux de la démonstration et s'ils peuvent réinvestir leurs connaissances issues de l'observation lorsqu'ils s'engagent dans la phase déductive. [Balacheff, 1985]

—par une séparation dans l'enseignement entre les contenus numériques et ceux de la géométrie: cela conduit notamment certains enseignants de l'école primaire à se centrer sur l'apprentissage des opérations numériques en laissant de côté les aspects géométriques qui pourraient entrer en jeu dans ces apprentissages numériques

(1) Une réforme des programmes de mathématiques de l'école secondaire est prévue en France pour octobre 1986

III- Conceptions des élèves

III-1 La construction de l'espace du point de vue psychogénétique

Les théories psychogénétiques, en particulier piagétiennes, qui ont cherché à décrire les processus de construction de l'espace par le sujet ont contribué à démystifier les trois oppositions intuition — déduction, construction — démonstration et spatial — numérique en dégagement les opérations conceptuelles que recouvrent les activités de perception et de représentation.

C'est ainsi que Piaget [1949, p. 197] s'élevant contre l'opposition intuitif — axiomatique montre que les formes intuitives de l'espace recouvrent des réalités génétiquement différentes. Il distingue, entre l'espace sensori-moteur et l'espace axiomatique, différents paliers:

—un espace intuitif au sens limité caractérisé par la représentation imagée et statique au niveau préopératoire.

—l'espace des opérations concrètes susceptibles de compositions réversibles et cohérentes, mais à propos d'objets manipulables.

—l'espace des opérations formelles correspondant à une géométrie déjà exprimable en propositions déductibles dont le contenu reste imaginé (c'est l'espace qui correspond au mode de pensée des Eléments d'Euclide).

Les mathématiciens recouvrent du terme d'intuition ces paliers en opposition à axiomatique. Il ne s'agit que des deux premiers, lorsqu'il s'agit d'opposer intuition à déduction.

Tous ces niveaux mettent en jeu des activités de construction de la part du sujet. L'espace n'est pas donné antérieurement aux opérations du sujet mais bien issu de ces dernières. L'espace "intuitif" de l'adulte est engendré par des opérations spatiales telles déplacements, mesures...... La construction de l'espace apparaît comme semblable à celle du nombre issu des opérations logico-arithmétiques sur des collections d'objets. L'opposition spatial-numérique disparaît.

Ainsi la perception, qu'on imagine être une simple activité de copie telle celle d'un appareil photographique est le résultat d'activités d'organisation et de coordination des informations sensorielles encodées [ce point de vue est présenté à l'aide d'une revue de différentes recherches dans Lesh, Meirkiewicz, 1978].

De la même façon, les représentations d'objets physiques sont le résultat de constructions qui s'appuient sur les actions sur ces objets et sur les coordinations de ces actions. Les informations figuratives puisées par les enfants sont déterminées par leur niveau opératoire et les enfants représentent ce qu'ils comprennent [Lesh, 1978].

Lunkenbein [1981, 1983] a montré que certaines propriétés des polyèdres sont privilégiées par les enfants dans le choix de leurs représentations. Il a également mis en évidence combien une tâche comme celle de comptage des faces d'un polyèdre a un rôle structurant dans les représentations de ce polyèdre élaborées par le sujet et cela par le rôle crucial joué par la coordination des actions de comptage partielles, relatives à des sous-ensembles de faces. La complexité des calculs spatiaux que doivent effectuer les enfants face à des photographies d'objets pour reconstituer le point de vue d'autrui a aussi été analysée par Samurçay [1983]

Ces différentes recherches conduisent à s'interroger sur la façon dont les élèves appréhendent et traitent le vaste ensemble de matériel concret et manipulable qui est mis à leur disposition dans l'enseignement parce qu'il est supposé faciliter l'apprentissage de la visualisation dans l'espace à trois dimensions. C'est un domaine à explorer comme le propose Wheeler [1981] pour transformer en fait scientifique ce qui n'est pour l'instant "qu'un acte de foi."

III-2 Conceptions élaborées par les élèves à propos des objets géométriques d'enseignement

Les problèmes constituant un lieu privilégié de fonctionnement des connaissances des élèves (cf I-3), les recherches qui ont eu pour objectif de dégager les conceptions des élèves à propos de notions géométriques d'enseignement, ont en général pris pour objet d'analyse les réponses d'élèves à des problèmes Jusqu'à présent ces recherches ont surtout donné des "photographies" à un instant donné de populations d'élèves face à une ou plusieurs tâches

Par exemple, dans le cas de transformations géométriques, comme translation, rotation, symétrie, des recherches ont porté sur le respect ou non respect des invariants d'une transformation par les élèves: conservation des longueurs [Thomas, 1978, Kidder, 1978], conservation des propriétés d'incidence [Thomas] dans des tâches de constructions du transformé d'une figure donnée ou dans une tâche de comparaison entre figure objet et figure image. Il est intéressant de constater une évolution dans ces recherches. Elles étaient très centrées au départ sur le développement opératoire des enfants (par exemple, pour des enfants au stade de la conservations des longueurs, la distance entre deux points est-elle conservée dans la transformation donnée?) Les résultats se sont révélés être différents suivant la tâche proposée (comparer par exemple les résultats de Thomas et de Kidder cités plus haut) Une plus grande attention a ensuite été portée au concept mathématique et à la situation même à laquelle étaient confrontés les élèves Des variables des tâches dont la variation entraîne des comportements de réponse différents de la part des élèves ont pu ainsi être dégagées. Citons l'exemple de la tâche de construction de la figure transformée dans le cas de la symétrie orthogonale. On a pu mettre en évidence que suivant

—la complexité de la figure objet

—la pente de l'axe de symétrie par rapport aux bords de la feuille

—la position de la figure objet par rapport à l'axe (distance, intersection vide ou non),

le taux de réussite des élèves et leurs stratégies de réponses changent considérablement [Grenier, 1985, Hart, 1981, Schultz, 1978, 1983]

Malheureusement les études prenant en compte les changements de stratégie des élèves au cours de la résolution du problème sont moins nombreuses. Citons cependant celles de Artigue et Robinet sur les conceptions du cercle chez des élèves de l'école élémentaire [1982] ou celles de Audibert [1983] à propos de problèmes de recherches de maxima dans des configurations géométriques soumises à des contraintes qui mettent en évidence la dynamique de la résolution du problème due à des interactions soit entre problème et élève [Audibert] soit entre élèves [Artigue et Robinet].

A partir de ces différentes recherches ont pu être mises en évidence des variables relatives au type d'espace et d'objets sur lesquels portent les problèmes, variables qui ont une incidence sur les conceptions des élèves et le traitement qu'ils font des objets géométriques engagés dans le problème

a) la taille de l'espace

On peut distinguer trois espaces dans lesquels les problèmes ne se posent pas de la même façon parce qu'ils ne mettent pas en jeu les mêmes possibilités de contrôle [Brousseau, 1983b]:

—le micro-espace: l'espace des objets qu'on peut déplacer sur une table

—le méso-espace: entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet; les déplacements y sont coûteux

—le macro-espace quit met en jeu des problèmes de repérage et d'orientation. La mesure d'une distance y est plus coûteuse que celle d'un angle.

La géométrie enseignée travaille uniquement sur le micro-espace qui induit des répresentations très fortes chez les élèves. Ainsi deux droites sécantes "doivent" se couper sur la feuille de papier; les relations entre objets "doivent" être visibles sur la feuille. Il est difficile de travailler en classe en dehors du micro-espace mais par des contraintes au niveau du matériel disponible on peut le simuler (cf. IV-2) Galvez [1985] a ainsi travaillé à fois sur le macro-espace et sur des simulations en classe avec des élèves mexicains de l'école primaire à propos du déplacement en milieu urbain.

b) la direction

L'espace ou le plan ne sont pas isotropes pour l'enfant. Dans le plan de la feuille de papier, les directions horizontales et "verticales" sont privilégiées par les élèves. Un angle droit à côtés obliques est moins bien reconnu que s'il est à côtés horizontal et vertical [Fisher, 1978, Zykova, 1969] Les procédures de construction de tranformés par symétrie par rapport à des axes verticaux ou horizontaux ne fonctionnent plus dans les cas où les axes sont obliques.

c) l'hétérogénéité de l'espace

L'espace réel n'est pas homogène du point de vue des pleins et des vides qui ne sont pas appréhendés de façon identique par les enfants alors que l'espace mathématique est par excellence homogène. Cette hétérogénéité de l'espace pour les enfants les conduit à envisager de façon différente un objet ou une figure suivant qu'il (ou elle) est seul dans l'espace ou parmi d'autres objets (ou figures)

III-3 Influence des facteurs socio-culturels

L'environnement extérieur à école contribue certainement à la formation des concepts spatiaux et géométriques chez les enfants qu'il s'agisse de l'espace physique dans lequel l'enfant vit et des diverses expériences spatiales de ce dernier que le milieu socio-culturel avec son organisation de l'espace, ses habitudes architecturales, ses modes d'expression et de représentation de la réalité.

Pour l'instant ont surtout été établis des constats de compétences et de conceptions différents suivant le milieu culturel, en liaison ou non à des séquences d'enseignement [Bishop, 1983, Denys, 1985, Mitchelmore, 1983].

Par ailleurs des concepts géométriques tels celui de symétrie ou celui de similitude correspondent à des notions de la vie courante sans renvoyer à des significations identiques; une étude de la signification pour des élèves de 8 à 19 ans de la notions de figures semblables et e celle de figures identiques a ainsi été faite par Vollrath [1977].

De nombreuses questions en résultent pour l'enseignement. Par exemple, par quels processus l'environnement extérieur interagit-il avec les apprentissages scolaires? Quelle utilisation peut-il en être fait dans la construction de situations d'enseignement?

IV- Situations d'enseignement

IV-1 Une problématique de la géométrie

Dans l'idéologie qui sépare intuition et déduction, la géométrie déductive (par exemple euclidienne) repose en général sur des évidences physiques qui servent de base à l'échafaudage construit ensuite par des règles internes à la théorie génératrice de ses propres problèmes. Une autre problématique de la géométrie peut être utilisée dans l'enseignement dans laquelle les savoirs géométriques sont introduits en tant qu'outils de contrôle et de prédictions de phénomènes liés au monde physique.

Depuis plusieurs années, des projets ont été développés dans cet esprit en Italie et aux Pays-Bas à propos de phénomènes technologiques ou astronomiques [Artiaco-Rossi, 1981, Belcastro, 1981, Boero, 1981], de problèmes de représentation à une échelle réduite de relations du macroespace [Goddign et Kindt, 1985]: par exemple, l'angle de rotation de l'ombre d'un piquet est un moyen de repérage du mouvement du soleil [Belcastro], la conservation des proportions permet à partir de photographies de calculer une approximation de la hauteur réelle de certains édifices [Goddign et Kindt]. Les problèmes de cartographie paraissent à cet égard très interessants et les réflexions épistémologiques développées par les géographes sont susceptibles de nous apporter des éléments de réflexion à ce sujet [cf *Cartes et figures de la terre,* ouvrage collectif du centre Georges Pompidou à Paris, 1980].

IV-2 Situations d'enseignement

Variables de la situation

Nous considérons les problèmes comme source principale d'évolutions des conceptions des élèves (cf. I-3). On a pu constater que les stratégies de réponse fournies par les élèves dépendent du choix des problèmes (cf. III-2) auxquels ils sont confrontés. Des variables ont ainsi été dégagées dont les changements de valeur entraînent des modifications importantes dans les stratégies de réponses des élèves. Grâce à des choix adéquats des valeurs des ces variables, on peut donc bloquer le fonctionnement de stratégies connues des élèves et les mettre en situation d'en utiliser de nouvelles faisant appel à des connaissances non mobilisées par les stratégies antérieures ou permettant la construction de nouvelles connaissances. Dans le domaine conceptuel de la géométrie, ces variables concernent les types d'espace (cf. III-2) et les objets engagés dans le problème.

La modification du fonctionnement des connaissances en situation-problème peut aussi être obtenue en jouant sur deux autres caractéristiques de la situation:

—les contraintes liées au matériel permis (instruments de tracé, de mesure,...)

—la finalité de la situation.

Contraintes de la situation

Le choix des contraintes permet de modifier le type de contrôles possibles de la part de l'élève et donc la nature et la signification des connaissances qu'il investit dans la résolution du problème. Prenons un exemple simple.

Le pliage selon une droite permet

—de décider si deux figures sont symétriques par rapport à cette droite

—ou de trouver l'axe de symétrie d'une figure

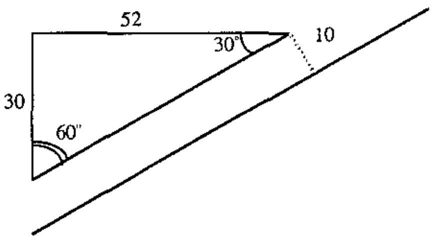
—ou de construire le symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

Dans tous ces cas la réponse est obtenue par la seule observation; elle relève uniquement d'une activité immédiate de perception. En revanche si l'on empêche le pliage ou le retournement par un artifice quelconque (matériau rigide ou inamovible), les problèmes précédents requièrent pour leur solution l'utilisation de propriétées de la symétrie orthogonale (équidistance de l'axe de points symétriques, conservation des longueurs, ...). La transformation d'une simple situation d'observation sans question pour l'individu qui observe en un problème dans lequel il investit des connaissances repose dans ce cas sur des contraintes rendant moins immédiates les décisions à prendre parce que des contrôles de type perceptif ont été empêchés. Ce sont les savoirs géométriques qui jouent alors le rôle d'éléments de contrôle et d'instruments de décision.

Il paraît important de dresser un répertoire d'actions permises par chaque type de matériel et celles rendues impossibles pour associer à chaque problème en fonction du matériel utilisé les connaissances les plus efficaces pour résoudre le problème. En effet le même problème suivant les contraintes choisies conduit à l'utilisation de propriétés géométriques différentes. Fielker [1979] en donne un très bon exemple:

"How do you construct a square, given each of the following, either on a geoboard or on plain paper with restrictions to various choices from compasses, rulers, set squares, protractors or just folding? (i) one side (ii) one diagonal (iii) midpoints of opposite sides (iv) midpoints of two adjacent sides (v) midpoint and centre (vi) one vertex and centre."

De la même façon construire le symétrique d'une figure rectiligne donnée par rapport à un axe, telle celle ci-contre, ne met pas en jeu les même propriétés suivant que l'on dispose



—d'une feuille de papier, d'un crayon, d'une règle graduée et d'une équerre

—d'un micro-ordinateur avec la tortue LOGO ne pouvant que se déplacer dans une direction donnée d'une longueur donnée et tourner d'un angle donné

Dans le deuxième cas la solution la moins coûteuse revient à construire le contour de la figure symétrique en utilisant les angles de la figure initiale.

Par ce type de dispositif la notion d'angle prend l'importance qu'elle possède dans le macro-espace et qu'elle a en général perdu dans l'espace de la feuille de papier avec les instruments usuels où les propriétés d'incidence sont plus efficaces. La tâche de construction qui vient d'être citée fait partie d'une séquence de tâches sur micro-ordinateur conçue et expérimentée par E. Gallou [1985] pour favoriser l'utilisation par les élèves des propriétés de changement d'orientation de la symétrie orthogonale. Certes en LOGO l'angle retrouve un caractère opératoire mais son utilisation est fondée sur une relation ternaire complexe: la somme de l'angle de la figure tracer et de l'angle de rotation de la tortue est égale à 180 degrés [Rouchier, 1981]. De nouvelles questions se posent donc avec la géométrie du micro-ordinateur.

L'analyse des nombreaux logiciels présents sur le marché, des contraintes qu'ils apportent, des objets et des propriétés géométriques qu'ils privilégient, de ceux et celles qu'ils rendent inopératoires est encore à faire mais elle apportera des données quant aux nouveaux statuts conférés par le micro-ordinateur aux objets géométriques.

Finalité des situations

L'analyse qui suit dans ce paragraphe repose sur la théorie des situations didactiques développée par G. Brousseau à propos de l'apprentissage en situation scolaire de connaissances mathématiques [Brousseau, 1981]

Les problèmes que nous avons cités jusqu'à présent relèvent de ce que l'on pourrait appeler une *géométrie de l'action*: le produit de l'activité est une construction, un calcul,.... Les connaissances investies dans le problème n'ont pas à être explicitées. L'apprentissage d'une connaissance exige de plus de savoir l'expliciter et éventuellement de la désigner dans un langage connu des autres. Mais la formulation d'une connaissance pose d'autres problèmes que ceux de l'usage implicite de cette dernière, même si les deux catégories de problèmes sont liés [Laborde, 1982].

Reconnaître ou savoir construire l'axe de symétrie d'une figure ne relève pas du même fonctionnement des connaissances que le désigner à l'aide de l'expression "axe de symétrie" ou décrire en mots les étapes de sa construction. "Droite du milieu" ou "droite qui partage le rectangle en deux" sont des expressions souvent employées par les élèves pour désigner un axe de symétrie du rectangle. Elles sont comprises par d'autres élèves mais elles sont aussi parfois interprétées comme renvoyant à une diagonale du rectangle. Une *situation de communication* entre élèves du type de la suivante permet leur prise de conscience de cette ambiguïté et de la nécessité d'un langage commun.

Un élève (ou un groupe d'élèves) émetteur reçoit une feuille de papier sur laquelle est dessinée une figure avec un de ses axes de symétrie. Un autre élève (ou groupe d'élèves) récepteur reçoit une feuille sure laquelle est dessinée une figure semblable (dans un rapport de similitude différent de 1) à celui de l'émetteur mais sans l'axe de symétrie et dans une position différente par rapport aux bords de la feuille. Les deux partenaires émetteur et récepteur savent qu'ils ont des figures semblables de dimensions et de positions différentes mais chacun ne connaît que celles relatives à sa figure. Le récepteur sait que la figure de l'émetteur contient un élément supplémentaire. La tâche de l'émetteur consiste à décrire cet élément dans un message uniquement verbal destiné au récepteur de façon à ce que ce dernier puisse le tracer sur sa figure. Cette description peut être faite en employant l'expression "axe de symétrie"; encore faut-il qu'elle soit comprise du récepteur. Une autre stratégie possible de l'émetteur consiste à décrire la construction de l'axe de symétrie; parce qu'il ne connaît pas les dimensions de la figure du récepteur, il est obligé d'avoir recours aux propriétés d'équidistance ou d'invariance des points de l'axe de symétrie et de les expliciter.

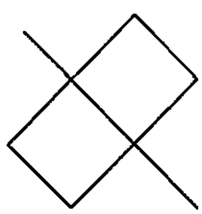


figure de l'émetteur

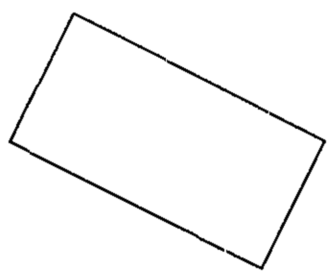


figure du récepteur

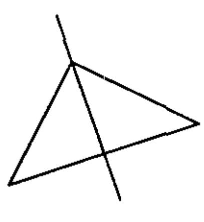


figure de l'émetteur

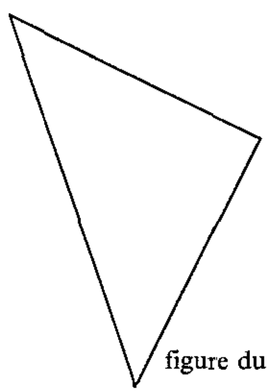
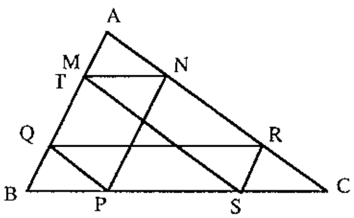


figure du récepteur

C'est à partir de ce type de situations qui permettent la prise de conscience dans la classe de la nécessité d'un langage commun que l'enseignant peut introduire le vocabulaire géométrique nouveau et les définitions usuelles.

Un troisième niveau de fonctionnement des connaissances est celui où elles interviennent pour établir la validité d'affirmations mathématiques. On retrouve là la finalité classique des savoirs géométriques. Mais la nécessité du recours à cette *phase de validation* peut être introduite soit pour trancher des désaccords au sein de la classe sur la vérité d'assertions proposées par des élèves, soit par l'absence de conclusions définitives que peut apporter la figure du fait de l'imperfection du dessin, d'une incertitude sur le tracé comme dans l'exemple suivant [Bkouche, Soufflet, 1983]:



Soit un triangle ABC; à partir d'un point M pris sur le côté AB on trace la parallèle à BC qui coupe le côté AC en N, puis à partir du point N la parallèle à AB qui rencontre BC en P et ainsi de suite. On obtient les points P, Q, R, S et T. Les points M et T coïncident.

Un dessin bien fait peut montrer la coïncidence mais ce fait peut apparaître comme fortuit, lié par exemple au choix du point M. La démonstration permet de trancher de débat. Dans ce type d'exemple une dialectique s'est instaurée entre dessin et démonstration. Les imperfections du dessin ont été à l'origine de la démonstration. Réciproquement la démonstration peut permettre des constructions. Par exemple dans le problème précédent trouver les points M tels que M et Q coïncident.

Dimension sociale des situations

Des situations de communication entre élèves, des situations de preuve fondées sur des débats entre élèves viennent d'être citées. La dimension sociale des situations est un élément encore peu exploité dans l'enseignement bien que le langage, les codages, les conventions de représentation, les explications soient à finalité sociale. Rappelons que la tradition selon Hérodote voit l'origine de la géométrie dans un problème de mémoire collective à propos des limites des terrains inondés par les crues du Nil. Il s'agissait de garder trace de l'étendue des propriétés de chacun. La mise en place en classe de représentations (particulièrement les représentations planes d'objets spatiaux) peut donc aussi s'appuyer sur des situations de communication entre élèves. A. Bessot et M. Eberhard [1983] ont utilisé au cycle moyen à l'école élémentaire (élèves de 8 à 10 ans) et en 5ème (élèves de 12 ans) ce type de situations pour favoriser l'émergence de représentations planes diversifiées d'assemblages de cubes et permettre un accord de l'ensemble de la classe sur un système de conventions.

V- Conclusion

Dans la pratique de l'enseignement, la part allouée à la géométrie est souvent l'objet de débats entre enseignants. La géométrie paraît soulever une multiplicité de problèmes moins bien délimités que dans le domaine numérique. J'ai cherché à montrer que les raisons en tiennent à l'histoire même de la géométrie et qu'une des tâches importantes réside dans la mise au point d'une problématique de la géométrie souvent absente des contenus actuels de l'enseignement. A cette fin ont été proposées des variables et des contraintes de situations d'enseignement dans le domaine géométrique, dont l'exploration est loin d'être achevée.

Références

Artigue, M., Robinet, J. [1982] Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, III.1, p. 5-64

Artiaco Rossi, A. [1981] La géométrie du monde technologique, in *Processus de géometrisation et de visualisation. Comptes rendus de la 33eme rencontre internationale de la C.I.E.A.E.M.*, p. 19-26

Audibert, G. [1983] Processus de recherche d'un problème de géométrie chez l'élève de l'enseignement secondaire, *Educational Studies in Mathematics*. 14, 2, p. 155-82

Balacheff, N. [1985] Processus de preuve et situations de validation, *Rapport de recherche. IMAG-LSD.* n°528

Belcastro, A. [1981] Géométrie et astronomie, in *Processus de géométrisation et de visualisation. Comptes-rendus de la 33ème rencontre internationale de la C.I.E.A.E.M.*, p. 61-70.

Bessot, A., Eberhard, M. [1981] Représentation d'assemblages de cubes au cycle moyen et en cinquième, *Petit x*. Ed. IREM de Grenoble, n°2, p. 51-75, n°3, p. 5-39

Bishop, A. [1983] Space and geometry, in *Acquisition of mathematical concepts and processes*, Academic Press, p. 175-203

Bkouche, R., Soufflet, M. [1983] Axiomatique, formalisme et théorie, in *Enseignement de la géométrie, Bulletin Inter-Irem*, n°23, p. 3-24

Boero, P. [1981] Construction du concept de forme géometrique, in *Processus de géométrisation et de visualisation, Comptes-rendus de la 33eme rencontre internationale de la C.I.E.A.E.M.*. p. 103-106

Brousseau, G. [1981] Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, 2, 3, p. 37-127

Brousseau, G. [1983a] Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*. 4, 2, p. 164-198

Brousseau, G. [1983b] *Etudes de questions d'enseignement. Un exemple la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, IMAG, LSD, Université de Grenoble, année 1982-1983, n°45, p. 183-227

Brunschvicg, L. [1947] *Les étapes de la philosophie mathématique*. PUF, Paris

Chevallard, Y. [1985] *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble

Denys, B. [1985] The teaching of reflection in France and in Japan, *Proceedings of the ninth conference for the Psychology of Mathematics Education*, p. 165-70

Fielker, D. [1979] Strategies for teaching geometry to younger children, *Educational Studies in Mathematics*, 10, p. 85-133

Fisher, N. [1978] Visual influences of figure orientation on concept formation in geometry, in *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Ed. Lesh, R., Mierkiewicz, D. ERIC-SMEAC, p. 307-21

Gallou-Dumiel [1985] *Symétrie orthogonale et angles*, Thèse de 3ème cycle, Institut Fourier, Grenoble

Galvez, G. [1985] *Une proposition pour l'enseignement de la géométrie à école primaire*. Thèse, Centre d'investigation de l'IPN, Mexico

Goddijn, A., Kindt, M. [1985] Geometry doesn't fit in the book, *Proceedings of the ninth conference for the Psychology of Mathematics Education*. p. 171-82

Gonseth, J.F. [1945] *La géométrie et le problème de l'espace*. Editions du Griffon, Neuchâtel

Grenier, D [1985] Middle school pupils conceptions about reflections according to a task of construction, *Proceedings of the ninth conference for the Psychology of Mathematics Education,* p. 183-8.

Guillerault, M., Laborde, C [1985]A study of pupils reading geometry, in *Pragmatics and Education*. Ed. Lowenthal, F. et Vandamme, F. Plenum Press, London et New York, p. 107-22

Hart, K [1981] *Children's understanding of mathematics 11-16*. Alden Press, Oxford, London and Northampton

Kidder, F.R [1978] Conservation of length: a function of the mental operation involved, *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*. Ed Lesh, R., Mierkiewicz, D ERIC SMEAC, p. 213-27

Laborde, C [1982] *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique* Thèse d'état IMAG, Université de Grenoble

Lesh, R [1978] Apparent improvement over time?!!, in *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts* Ed. Lesh, R. Mierkiewicz, D. ERIC SMEAC, p 29-48

Lesh, R , Mierkiewicz, D [1978] Perception, imagery and conception in geometry, in *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts*. Ed Lesh, R., Mierkiewicz, D ERIC SMEAC, p. 7-28

Lunkenbein, D., Allard, H., Goupille, C [1981] Genèse et développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte; description et analyse d'expériences de recherche, *Rapport n°34, Université de Sherbrooke, Département de Mathématiques, Canada*

Lunkenbein, D [1983] Observations concerning the child's concept of space and its consequences for the teaching of Geometry to younger children, *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education,* Birkhaüser Boston, p 172-4

Mitchelmore, M.C [1983] Geometry and spatial learning: some lessons from a Jamaican experience *For the Learning of Mathematics* 3, 3, March 1983

Piaget, J. [1949] *Introduction à l'épistémologie génétique la pensée mathématique* Paris, PUF 2ème édition, 1973

Rouchier, A [1981] Problèmes, procédures, programmes étudiés et réalisés par des enfants de CM2 utilisant un mini ordinateur, *Revue française de pédagogie,* n°56, p. 18-26

Samurçay, R. [1984] *Le problème de la coordination des points de vue chez l'enfant. analyse des référentiels et des calculs spatiaux,* Thèse de 3ème cycle, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales

Schultz, K [1978]Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and the operational stages of cognitive development, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*. Ed Lesh, R ,Mierkiewicz, D. ERIC SMEAC, p 191-211

Schultz, K. Austin, J.D [1983] Directional effects in transformation tasks, *Journal for Research in Mathematics Education* 14, p 95-101, March 1983

Tannery P. [1887] *La géométrie grecque,* Gauthier-Villars, Paris

Thomas, D [1978] Students' understanding of selected transformation geometry concepts, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*. Ed. Lesh R., Mierkiewicz D, ERIC SMEAC, p. 177-93

Vergnaud, G. [1982] Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics* 3, 2 November 1982, p 31-41

Vernant, J.P [1962] *Les origines de la pensée grecque*. PUF, Paris, 5ème édition, 1983

Vollrath, H J [1977] The understanding of similarity and shape in classifying tasks, *Educational Studies in Mathematics*, 8. p 211-24

Wheeler, D Imagery and geometrical thinking, *Processus de géométrisation et de visualisation. Comptes-rendus de la 33eme rencontre internationale de la C I E A E M.*, p. 351-3

Zykova, V I. [1969] The psychology of sixth grade pupils mastery of geometric concepts, in *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Vol. 1, Stanford University. School Mathematics Study Group., p. 149-88

Continued from page 21

Lalljee, M , Brown, L B , and Ginsburg, G P. Attitudes: Disposition behaviour or evaluation? *British Journal of Social Psychology*, 1984, *23*, 233-244

Leder, G.C. Mathematics achievement and fear of success *Journal for Research in Mathematics Education,* 1982. *13*, 124-135

Lockheed, M.E. and Harris, A M. Cross-sex collaborative learning in elementary classrooms *American Educational Research Journal* 1984, *21*, 275-294

Osgood, C E., Suci, G.J , and Tannenbaum, P.H *The measurement of meaning* Urbana: University of Illinois Press, 1957

Scharf, E S The use of the semantic differential in measuring attitudes of elementary school children toward mathematics *School Science and Mathematics* 1971, *71*. 641-649

Schofield, H.L. and Start, K.B Mathematics attitudes and achievement among student teachers. *Australian Journal of Education* 1978, *22* 72-82

Shumway, R J (Ed.) *Research in Mathematics Education* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, Inc , 1980

Thurstone, L L. Attitudes can be measured *American Journal of Sociology*, 1928, *33*. 529-554

Thomas, W.I. and Znaniecki, F. *The Polish peasant in Europe and America. Vol. 1* Boston: Badger, 1918

Tsai, S. and Walberg, H.J. Mathematics achievement and attitude productivity in junior high school *Journal of Educational Research*. 1983, *76*. 267-272

Triandis. H.C. *Attitude and attitude change*. New York: John Wiley 1971