Conceptions de Fonction et Registres de Représentation: Etude de Cas au Lycée

NATHALIE GAUDIN

La littérature concernant les conceptions que les élèves peuvent avoir de la notion de fonction est riche Cette richesse est une marque des difficultés rencontrées dans l'apprentissage des fonctions et de la volonté de comprendre ces difficultés. Nous avons choisi de développer certains aspects des travaux de Vinner et de Sierpinska pour le montrer. Ces deux auteurs ont consacré une part importante de leurs recherches aux fonctions et offrent un aperçu représentatif des résultats existants. Leurs études mettent en évidence que la caractérisation des conceptions renvoie, en partie, à des attributs des représentations des fonctions

Par exemple, pour certains élèves, un graphe présentant certaines irrégularités (un point de discontinuité, un changement d'allure .) n'est pas la représentation d'une fonction ; ou encore, la fonction est identifiée à une de ses représentations (expression algébrique, courbe). Ces résultats soulèvent un questionnement sur les moyens choisis pour caractériser les conceptions. Que signifie qu'une fonction peut être identifiée à une de ses représentations? Quelles alors sont les relations entre ces représentations? Comment les conceptions s'actualisent-elles et s'engagent-elles dans différents types de problèmes qui peuvent être posés aux élèves?

Nous avons cherché à avancer, par l'analyse d'une situation particulière, dans l'étude des rapports entretenus par les registres de représentation des fonctions (algébrique et graphique [1]) et du rôle de ces registres dans la caractérisation et le fonctionnement des conceptions des fonctions Les conceptions visent à rendre compte de l'élève confronté à un problème qui lui est posé. Elles se manifestent comme moyens, pour celui-ci, de résoudre ce problème. Nous souhaitons mieux comprendre ce fonctionnement et la place qu'y prennent les registres de représentation. Nous définirons le sens que nous donnons à *conception* (terme largement utilisé en didactique des mathématiques) et préciserons comment la caractérisation des conceptions que nous avons choisie nous permet d'avancer dans cette compréhension.

Deux situations, mettant en jeu une courbe et son équation dans un repère, ont été conçues et proposées à des élèves de terminale scientifique [2] L'analyse des comportements de ces élèves met en évidence deux conceptions différentes des fonctions (appelées « graphe » et « courbe »). Nous montrerons, en particulier, comment les registres dans lesquels prennent place les actions des élèves jouent un rôle important dans la caractérisation de ces conceptions.

Introduction aux conceptions de « fonction »: présentation des travaux de Vinner et Sierpinska

Travaux de Vinner

Vinner (1989, 1992) constate que la plupart des concepts mathématiques ont une définition formelle souvent présentée en cours aux élèves. Cependant, les élèves n'utilisent pas nécessairement ces définitions pour décider de la nature des concepts mathématiques qu'ils rencontrent. En fait, ces choix sont généralement motivés par l'ensemble des images mentales (c'est-à-dire tout type de représentations: graphique, symbolique, iconique, .) que l'élève associe au nom du concept et par l'ensemble des propriétés que celui-ci attribue au concept. Cet ensemble est le résultat de l'expérience de l'élève avec les exemples et contre-exemples du concept qu'il a pu rencontrer Ainsi les objets mathématiques caractérisés par ces images mentales ne sont pas forcément ceux caractérisés par la définition du concept mathématique ou par la définition donnée par l'élève lui-même Cet écart peut engendrer des comportements de l'élève non attendus par l'enseignant. Pour comprendre ce dysfonctionnement, Vinner s'attache à mettre en évidence l'ensemble des images mentales (*images*) et des définitions (*définitions*) des élèves.

Images et *définitions* dans le cas du concept de fonction sont caractérisés grâce à l'analyse de réponses à un questionnaire donné à des étudiants (de l'enseignement supérieur israélien). On leur demande de définir une fonction et de déterminer s'il existe des fonctions décrivant certaines situations présentant une courbe dans un repère ou décrivant un processus de correspondance entre nombres réels (par exemple, *existe-t-il une fonction qui attribue à chaque nombre différent de zéro son carré et qui attribue à zéro la valeur 1?*)

Types des *définitions* d'une fonction données par les étudiants:

- *Correspondance*: Une fonction est une correspondance entre deux ensembles telle que chaque élément du premier ensemble est associé à exactement un seul élément du deuxième ensemble Exemple de réponse d'étudiant: *« Pour tout élément de A, il existe un seul élément de B ».*

- *Relation de dépendance*: Une fonction est une relation de dépendance entre deux variables Exemple: *« Une fonction est une relation entre deux variables »*

- *Règle*: Une fonction est une règle Une règle doit comporter certaines régularités alors qu'une *correspondance* peut être arbitraire. Ici, le domaine source et le domaine image ne sont pas mentionnés Exemple: *« Une fonction est le résultat d'une certaine règle appliquée à une grandeur variable ».*

- *Opération*: Une fonction est une opération ou une manipulation (on opère sur un nombre donné, généralement par le biais d'une opération algébrique, en vue d'obtenir son image). Exemple: *« Une fonction est une opération faite sur certaines valeurs de x qui associe à chacune de ces valeurs de x une valeur de y = f(x) »*.

- *Formule*: Une fonction est une formule, une expression algébrique ou une équation. Exemple: *« Une fonction est une équation reliant deux termes »*.

- *Représentation*: La fonction est identifiée à une de ses représentations graphique ou symbolique Exemple: *« Une fonction est un graphe qui peut être décrit mathématiquement »* ou *« y = f(x) »*.

Types des *images* des fonctions relevées chez les étudiants (chacune de ces *images* représente un critère susceptible d'être retenus par les étudiants pour justifier qu'un graphe ou une correspondance désigne ou ne désigne pas une fonction):

- *Discontinuité*: Le graphe présente un 'trou' ou bien la correspondance est discontinue en un point du domaine

  Exemple (Figure 1):

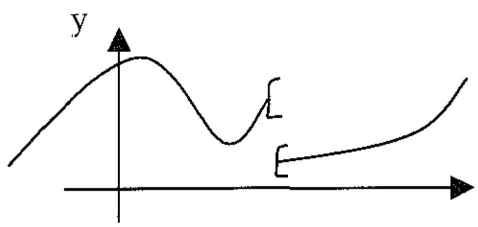


Figure 1: Graphe présentant une discontinuité

- *Domaine 'divisé'*: Le domaine de définition est divisé en deux ou plusieurs domaines disjoints, sur chacun desquels la 'règle' de correspondance diffère. En conséquence, le graphe peut changer de caractère, d'allure sur ces différents domaines

  Exemple:

- La fonction est définie par deux expressions algébriques différentes sur deux parties complémentaires de son domaine de définition.

- Une partie du graphe est linéaire, l'autre pas (Figure 2):

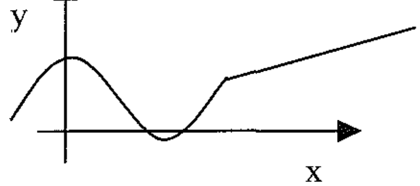


Figure 2: Domaine 'divisé'

- *Point exceptionnel*: Il existe un point exceptionnel pour lequel la règle de correspondance de la fonction diffère (exemple: *existe-t-il une fonction qui attribue à chaque nombre différent de zéro son carré et qui attribue à zéro la valeur 1?*)

- *Une seule image*: Si une correspondance entre deux ensembles assigne exactement un élément du second ensemble à chaque élément du premier ensemble, alors c'est une fonction. Sinon, ce n'est pas une fonction.

En observant la place des registres de représentation dans l'ensemble des *images* et *définitions*, on peut remarquer qu'une partie des *définitions (opération, formule et représentation)* fait explicitement référence à un registre de représentation, (le registre algébrique le plus souvent) et qu'une partie des *images* (*discontinuité* et *domaine divisé*) se réfère à des attributs visuels du registre graphique de représentation, laissant ainsi apparaître la place prise par les registres dans la caractérisation des conceptions des élèves. Sans entrer dans le travail de Vinner (1989, 1992), on voit que les élèves s'attachent à certaines formes de régularité des représentations des fonctions (point de discontinuité, équations de la forme y=f(x), allure « régulière » du graphe ...) Il est intéressant de noter que les arguments *discontinuité, domaine divisé* ou *point exceptionnel* sont utilisés, selon les étudiants, aussi bien pour accepter ou pour rejeter certains exemples comme des fonctions Que peut signifier pour les élèves la reconnaissance (ou la non-reconnaissance) de ces régularités dans la résolution d'un problème particulier autre qu'un problème de reconnaissance de fonction ?

Travaux de Sierpinska

Sierpinska (1992) appuie son travail sur une étude épistémologique et historique du concept de fonction, ainsi que sur l'observation du comportement d'étudiants. Ces analyses permettent de dégager un certain nombre *d'obstacles épistémologiques* relatifs aux fonctions. Elle les décrit comme des connaissances A la suite de Brousseau (1983), qui a introduit l'idée d'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques, elle retient de ces obstacles leur caractère inévitable, ainsi que leur apparition et leur résistance dans l'histoire et chez les élèves. Brousseau souligne en particulier que le dépassement de tels obstacles est nécessaire à la constitution du sens de la connaissance Gardant à l'esprit notre questionnement, nous nous limitons ici à citer les obstacles concernant (directement) les représentations d'une fonction [3].

Sierpinska montre que certains étudiants identifient la fonction avec la *ligne* qui la représente, les axes n'ont parfois pas de sens particulier pour ces élèves. La fonction est regardée comme un objet géométrique et est classée selon la forme de cet objet (parabole, sinusoïde, allure des graphes des fonctions élémentaires ...).

D'autres étudiants ont une vue plus analytique des représentations graphiques d'une fonction, bien qu'ils identifient eux aussi la fonction et cette représentation La représentation est vue comme composée de points (x, y) de

R^2 où x et y sont en relation Cette relation peut être donnée par une équation (du registre algébrique), mais la ligne (du registre graphique) ne représente pas la relation, c'est la relation qui représente la ligne. La fonction est identifiée à la ligne, pas à la relation.

La fonction peut aussi être identifiée à sa représentation algébrique Sierpinska donne l'exemple de deux élèves pour qui l'expression algébrique est, en quelque sorte, le « *nom* » de la fonction. On leur demande de trouver des fonctions telles que f(2) = 3 et f(3) = 2 Les étudiants essaient différentes expressions algébriques de fonctions et observent sur l'écran d'un ordinateur la courbe tracée. Les paramètres de ces expressions sont alors corrigés au hasard (dans le registre algébrique) et les élèves observent les changements associés sur l'écran (dans le registre graphique). Ils ne considèrent pas le sens de x dans ces expressions : ils ne substituent jamais x par la valeur 2 dans l'expression de façon à obtenir 3. Pour ces élèves, la fonction est juste une certaine forme sur l'écran, l'expression algébrique ne représente pas une relation entre les coordonnées d'un point de la courbe mais est une sorte de *nom* pour la fonction. Or le graphe d'une fonction est la représentation graphique dans un système de coordonnées du lien fonctionnel entre une abscisse et une ordonnée. Et c'est l'interprétation point par point du graphe qui établit le lien entre représentation algébrique (du registre algébrique) et graphique (du registre graphique) d'une fonction. Les coordonnées d'un point du graphe sont de la forme $(x, f(x))$.

A la lecture de ces travaux, nous voyons émerger une distinction possible entre deux conceptions (« courbe » et « graphe » [4]). Cette distinction est en partie rendue possible par l'analyse des rapports différents que peuvent entretenir le registre graphique et le registre algébrique Ces conceptions intéressent particulièrement notre travail et nous proposons de préciser les moyens de leur caractérisation et de leur différentiation.

Conceptions: quels outils pour modéliser l'élève en situation?

Comme cela été dit en introduction, nous cherchons à construire une situation mettant en jeu le concept de fonction et ses représentations, et dans laquelle l'élève est amené à construire des outils pour résoudre un problème En effet, c'est sa manifestation en tant que moyen de résolution dans le problème qui nous permet d'attester d'une *conception* Cela signifie en particulier que les conceptions permettent de rendre compte des actions menées par l'élève dans le problème, des registres associés à ces actions et des choix sous-tendant ces actions Pour cela et en référence à la modélisation proposée par Balacheff (1995), nous décrivons une conception en termes *d'actions et opérateurs*, de *registres de représentation* et de *contrôles*:

- Les *actions* et *opérateurs* sont les manipulations, transformations, actions que le sujet met en œuvre sur les objets en jeu dans la situation (ou plus précisément, en mathématiques, sur leurs représentations).

- Les *registres* [5] se réfèrent aux systèmes de représentation (qui se limiteront dans notre cas au registre graphique et au registre algébrique).

- Les *contrôles* rendent compte des critères qui renvoient (pour le sujet) au choix, à la décision, à l'adéquation, à la validité d'une action, à la décision « résolu » pour un problème.

Les contrôles et les opérateurs intervenant dans chaque registre permettent de mettre en évidence que chacun des systèmes de représentation a des propriétés différentes dans la situation (au sens de ce qu'ils permettent ou ne permettent pas de prendre en charge dans la situation)

Cabri-Géomètre [6], un environnement informatique privilégié pour la réalisation d'une situation répondant à notre questionnement: présentation de cette situation

Cabri-Géomètre est un environnement informatique dans lequel il est possible de construire et de manipuler des objets de la géométrie (nommés point, droite, segment, triangle, cercle, conique...). Les déplacements des objets construits dans Cabri et les relations entre ces objets se font en référence à des connaissances de la géométrie euclidienne et aux propriétés qui ont défini leur construction

Choix de Cabri-Géomètre pour répondre à notre problématique

Il est possible de demander à Cabri l'affichage des coordonnées d'un point et de l'équation d'une droite ou d'une conique qui ont été construits dans un repère Le déplacement de ce point, de cette droite ou de cette conique dans le repère entraîne l'actualisation en temps réel des coordonnées ou des coefficients de l'équation (Figures 3.1-3.4) La possibilité d'une manipulation directe d'objets graphiques en relation avec des représentations algébriques nous est apparue pertinente pour l'étude des rapports entre les registres (algébrique et graphique) de représentation des fonctions et du rôle de ces registres dans la caractérisation des conceptions des fonctions (en particulier la caractérisation des conceptions « graphe » et « courbe » évoquées plus haut)

Présentation des deux situations

En situation 1, l'écran présente une parabole oblique dans un repère, une équation de cette parabole dans le repère, un point de la parabole et ses coordonnées dans le repère. Ces objets ont été construits dans Cabri-Géomètre L'utilisateur a la possibilité de faire pivoter librement la parabole autour de son sommet sans déformations (Figures 3.1-3.4), les coordonnées du point et l'équation de la parabole sont alors modifiées avec ces mouvements. On demande aux élèves de donner une équation de la parabole, de tracer la tangente à la parabole en un point M_0 et de donner une équation de cette tangente.

Les élèves ont à leur disposition les objets de Cabri-Géomètre *(droite, point, équation d'une droite, ...)*, une macro-construction permettant de tracer une droite dont on connaît l'équation cartésienne et une macro-construction faisant apparaître en rouge la tangente que l'on demande de tracer. Cette dernière macro-construction, appelée « *tangente vérif* », permet une validation par superposition d'un candidat tangente tracé par un élève. La macro-construction « *tangente vérif* » doit en fait être perçue par l'élève comme un indicateur visuel. Un travail préparatoire à l'expérimentation a été mené pour que les élèves acceptent que deux *droites* de Cabri visuellement superposées soient la représentation d'une même droite [7] (le travail a en particulier porté sur les superpositions acceptables).

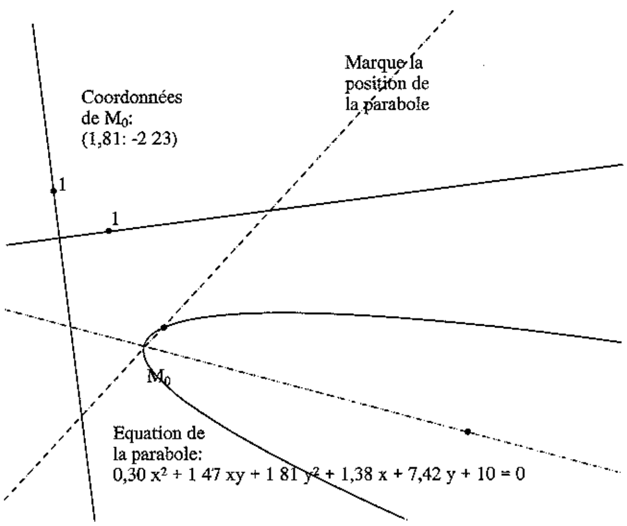


Figure 3.1: Différentes positions de la parabole

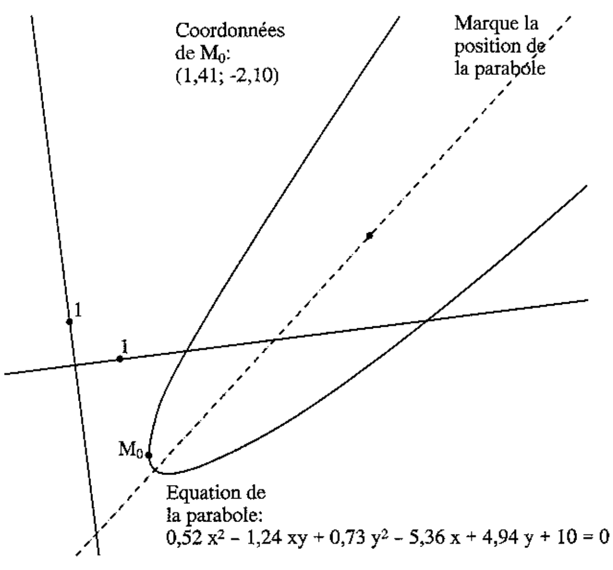


Figure 3 2: Différentes positions de la parabole

En situation 2, les consignes, les objets et les macro-constructions disponibles sont les mêmes qu'en situation 1, mais cette fois, les mouvements de la parabole sont soumis à des contraintes. En particulier, ces contraintes ne permettent pas à la parabole d'atteindre la position verticale (les Figures 4.1 et 4.2 sur la page suivante indiquent les positions haute et basse, la parabole pouvant prendre toutes les

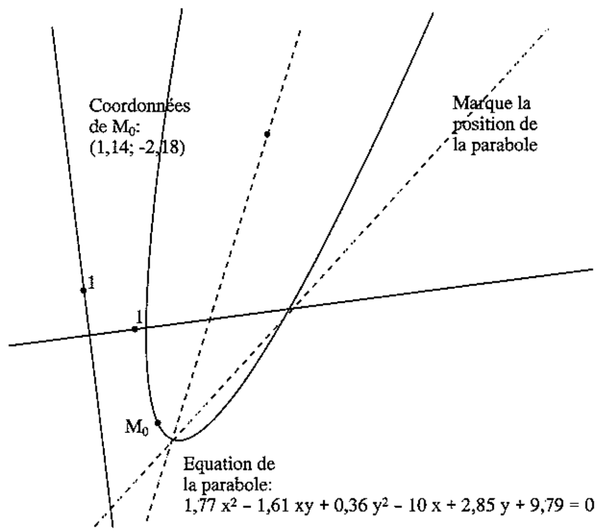


Figure 3.3: Différentes positions de la parabole

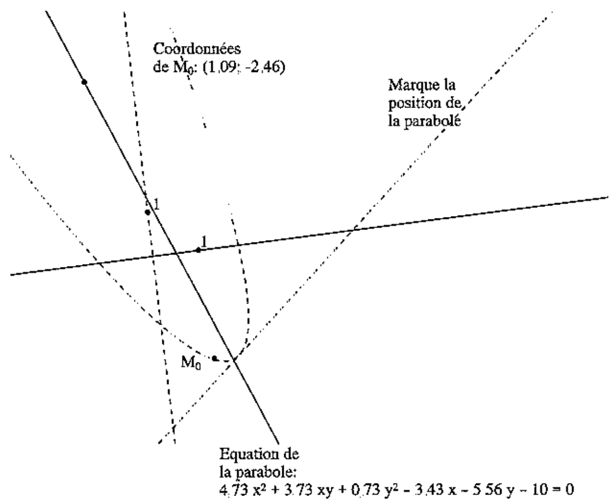


Figure 3 4: Différentes positions de la parabole

positions intermédiaires) et d'être le graphe d'une fonction du second degré, ce qui, nous le verrons, joue un rôle essentiel dans la stratégie associée à la situation 1.

Cette expérimentation doit nous permettre d'identifier les *opérateurs*, *registres* et *contrôles* engagés dans le problème par les élèves, en vue de caractériser les conceptions mises en jeu. Afin de pouvoir garder des traces suffisantes des comportements des élèves, ceux-ci ont travaillé en binômes, leurs conversations ont été enregistrées, ainsi que toutes les actions menées dans Cabri-Géomètre (le logiciel enregistre chacune des actions marquées par un clic de souris et permet ensuite de visionner leur enchaînement à la manière d'un magnétoscope).

Les élèves ayant participé appartiennent à une terminale S, spécialité mathématiques, d'un lycée de l'agglomération grenobloise. Ils ont suivi depuis deux ans un enseignement sur les fonctions, ont étudié les fonctions polynômes du second degré, connaissent depuis un an la propriété donnant

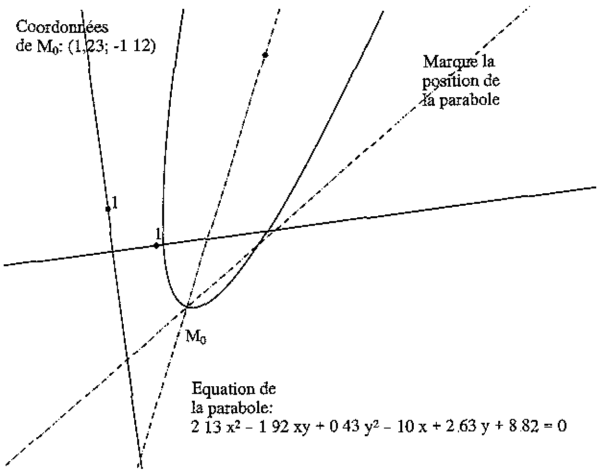


Figure 4.1 : Position haute

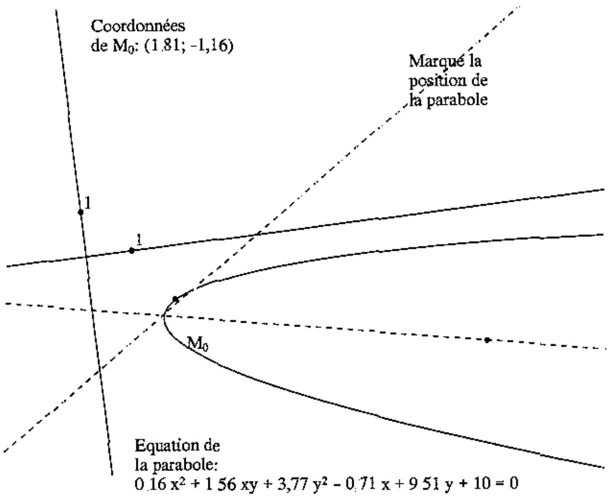


Figure 4 2: Position basse

l'équation d'une tangente au graphe d'une fonction à partir du nombre dérivé, les chapitres sur les coniques et courbes paramétrées n'ont pas encore été abordés à ce moment de l'année.

Stratégie optimale associée à la situation et analyse *a priori* des conceptions mises en jeu

Parmi les stratégies que l'on peut associer à la situation, certaines, du cadre géométrique, permettent de trouver un candidat tangente, pour un coût raisonnable (sans utiliser l'équation de la parabole, indépendamment de la position de la parabole et de l'idée de graphe et de fonction; les situations 1 et 2 sont alors équivalentes):

- Soit la parabole est une conique et la tangente est tracée à l'aide des propriétés géométriques et/ou algébriques (équation réduite) propres à cette conique.
- Soit la tangente est définie comme la droite « limite » (MM_0) lorsque M est un point de la parabole qui se rapproche de M_0.
- Soit la tangente est définie comme la droite (QM_0) où Q est le milieu de [OP], P est le point d'intersection de la tangente T en O à la parabole (perpendiculaire à l'axe de symétrie de la parabole) et de la perpendiculaire à T passant par M_0 (Figure 5)

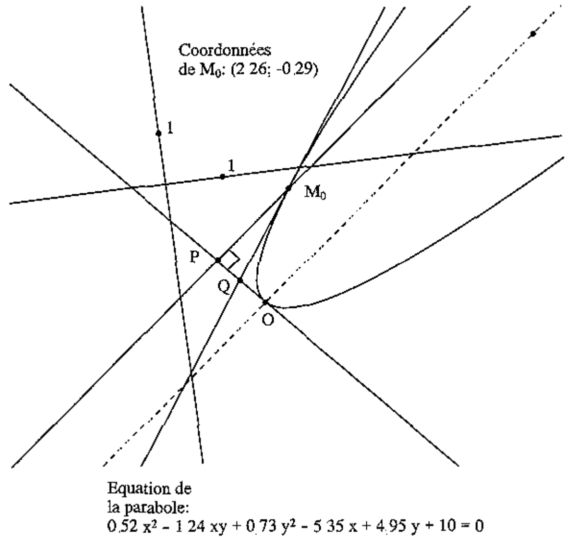


Figure 5: Une stratégie ne nécessitant pas l'équation de la parabole

Une analyse rapide des pratiques, des exercices des manuels scolaires associés aux paraboles et aux tangentes à une courbe et des chapitres abordés par la classe, nous ont fait penser que ces stratégies avaient peu de chance d'être mises en œuvre par les élèves. Une stratégie « optimale » a été dégagée. Le caractère « optimal » renvoie au coût de résolution, aux moyens d'action offerts par la situation et aux outils mathématiques auxquels un élève de terminale S est supposé avoir accès (outils utilisés dans les exercices dits *d'étude de fonctions* de manuels scolaires [8] et avec lesquels nous pensons qu'un élève de terminale, par rapport à un élève de première, est plus familier). Nous avons retenu les trois propriétés [9] suivantes (nous rappelons, relativement aux propriétés de la parabole, que le chapitre sur les coniques n'a pas encore été abordé):

- L'équation d'une parabole (verticale) est de la forme $y = ax^2+bx+c$.
- Une parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ est le graphe représentatif de la fonction définie par $f(x) = ax^2+ bx+c$, x réel
- Une équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $M_0(x_0, y_0)$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, où f' est la fonction dérivée de f.

Stratégie optimale en situation 1

Il s'agit de contrôler la position de la parabole Cela signifie placer la parabole en position verticale, afin que celle-ci soit le graphe d'une fonction. L'équation de la parabole verticale est alors $3{,}32x^2-10x-2{,}36y+1{,}56 = 0$.

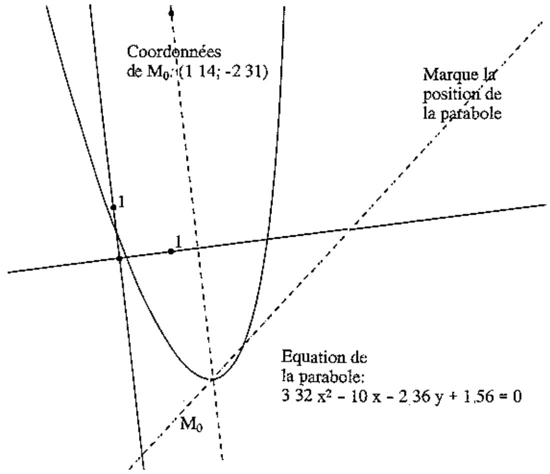


Figure 6: La parabole en position verticale

L'équation de la parabole, écrite sous la forme $y = f(x)$ ($y = 1/(2{,}36)\ (3{,}32x^2-10x+1{,}56)$), donne une représentation algébrique de la fonction dont la parabole est une représentation graphique

L'opérateur : « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ » permet d'obtenir une équation cartésienne de la tangente L'équation de la tangente obtenue est $y = -1{,}01x-1{,}17$, où l'abscisse de M_0 est affichée par Cabri à l'écran (1,14).

La macro-construction traçant une droite dont on connaît l'équation cartésienne permet de tracer la tangente. Cette tangente est validée par superposition avec « *tangente vérif* ».

Stratégie optimale en situation 2

Les contraintes sur les mouvements de la parabole ne lui permettent plus d'être le graphe d'une fonction dans le repère de Cabri. Cependant, la parabole en position horizontale est le graphe d'une fonction dans le repère R'(o, -j, i) (contrôle sur la position de la parabole)

Le changement de variable $X = -y$ et $Y = x$, associé au changement de repère R(o, i, j) (R'(o, -j, i) permet d'obtenir une équation de la parabole dans le repère R'($3{,}08X^2-2{,}04Y-9{,}23X+10 = 0$), puis une représentation algébrique ($f(X) = 1/(2{,}04) \times (3{,}08X^2 - 9{,}23X+10)$) de la fonction dont la parabole est une représentation graphique dans le repère R'.

De la même manière qu'en situation 1, l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ » permet d'obtenir une équation cartésienne de la tangente dans R'. L'équation obtenue est $Y = -1{,}20X+3{,}06$, où l'abscisse de M_0 est $X_0 = y_0$ (1,10)

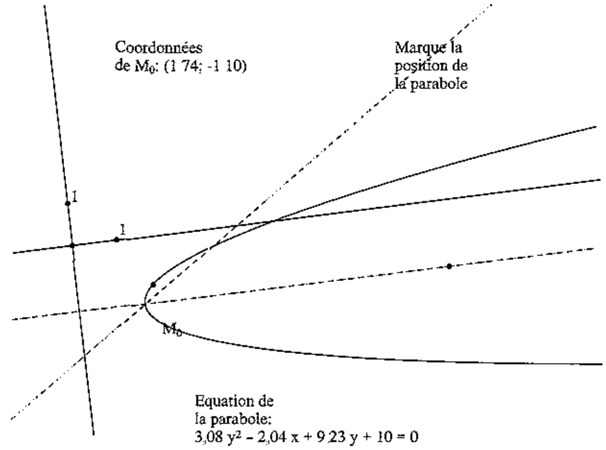


Figure 7: La parabole en position horizontale et son equation

Le changement de variable $y = -X$ et $x = Y$ fournit une équation cartésienne de la tangente dans R (repère par défaut dans lequel Cabri trace les droites dont on lui donne une équation cartésienne). Cette équation est $x = 1{,}20y + 3{,}06$. La macro-construction traçant une droite dont on connaît l'équation cartésienne permet de tracer la tangente.

Cette tangente est validée par superposition avec la tangente tracée par « tangente vérif ».

Analyse *a priori* des conceptions mises en jeu

L'analyse *a priori* doit établir en quoi la situation peut permettre d'accéder aux conceptions de la notion de fonction, mettre en évidence ce que peuvent être les caractéristiques de ces conceptions dans notre situation particulière et, éventuellement, leurs relations avec les conceptions dégagées par d'autres recherches Elle vise notamment à prévoir les actions et les contrôles engagés par les élèves qui permettront la caractérisation des conceptions En particulier, deux caractéristiques des situations de la parabole nous semblaient propices à révéler certaines conceptions de la notion de fonction : le jeu dynamique entre registre algébrique et registre graphique que permet Cabri, la nécessité d'engager une décision sur la position de la parabole pour permettre le traitement de sa représentation algébrique. C'est notamment pour révéler les contrôles qui sous-tendent cette décision que la situation 2 a été choisie. Nous montrons ici comment les caractéristiques des situations nous permettent de penser que des conceptions différentes, *courbe* et *graphe*, peuvent être mises en jeu dans la résolution et comment nous espérons distinguer ces conceptions

Mais précisons tout d'abord ce que sont les deux objets graphe et courbe pour nous. Les lignes représentées sur l'écran par Cabri dans nos situations peuvent être *vues* comme des objets différents. En particulier le dessin de la parabole peut donner lieu à deux conceptualisations appelées par la suite graphe et courbe L'analyse des différentes stratégies associées à la situation permet de penser que la stratégie optimale résulte de la reconnaissance de la parabole comme graphe d'une fonction dans certaines positions

Un graphe est une partie du plan cartésien (c'est-à-dire nécessairement muni d'un repère) et est un sous-ensemble de points du plan cartésien définis par un couple de coordonnées (x, y) (pouvant être définies dans le registre algébrique). On appelle graphe d'une fonction f, l'ensemble des points de coordonnées (x, f(x)) du plan cartésien. Notre parabole en tant que graphe est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) tels que x et y vérifient l'équation visible à l'écran Elle est le graphe d'une fonction lorsqu'elle est en position verticale (en situation 1 et en position verticale dans le repère R' en situation 2)

Une courbe est une entité, un objet du registre graphique. Elle est le résultat d'un tracé continu obtenu par un moyen quelconque (lieu, trajectoire d'un mobile ...) Ainsi, une courbe existe dans le plan indépendamment de la présence d'un système de coordonnées Notre parabole en tant que courbe est un objet dont une représentation est visible à l'écran et qui peut être déplacé sans être déformé. L'équation visible à l'écran est une représentation dans le registre algébrique de la parabole (les coordonnées d'un point de la parabole vérifient l'équation)

Jeu sur les registres et conceptions permettant ou ne permettant pas de distinguer les objets courbe et graphe :

On peut raisonnablement penser qu'un élève va être fortement perturbé par la forme de l'équation de la parabole oblique (rarement rencontrée en classe) La stratégie optimale est opérante sur la parabole lorsqu'elle est un graphe Pour cela la parabole doit être déplacée. Il s'agit, par ce déplacement, de distinguer les objets graphe et courbe associés tous les deux à la parabole. Ainsi, le dépassement de la perturbation liée à la forme de l'équation, relevant donc essentiellement de la centration sur le registre algébrique, est rendu possible par un contrôle dans le registre graphique sur la position de la parabole.

Bouger la parabole est une action du registre graphique contrôlée en partie dans le registre algébrique (c'est au niveau de l'équation que la position graphe peut être trouvée). Le passage en continu (au sens de la manipulation dans Cabri) d'une forme algébrique à une autre, lorsque la parabole reste globalement et perceptiblement invariante, devrait permettre de mettre en lumière les rapports de l'équation avec la représentation graphique parabole (graphe ou courbe). Si la position verticale est discriminée par les élèves, cela signifie qu'ils ont mis en place des contrôles associés à la forme de l'équation et à la position de la parabole.

Nous pensons que ce jeu sur les registres est pertinent pour l'étude des aspects des conceptions qui permettent ou ne permettent pas de distinguer courbe et graphe. Voici l'exemple de deux contrôles pouvant fonctionner pour le choix de la position verticale :

- « *L'équation d'une parabole (verticale) est de la forme* $y = ax^2+bx+c$ »: Ce contrôle ne nécessite pas d'identifier la parabole comme graphe. La parabole peut alors désigner une certaine forme perçue globalement dans le registre graphique et reconnue parce que souvent rencontrée en classe (par exemple)
- « *Une seule image* » [10]: Dans notre cas, il peut s'agir de placer verticalement la parabole pour qu'elle remplisse la condition « *à chaque valeur de l'abscisse x, ne correspond qu'un point de la parabole* », contrôle permettant de reconnaître la parabole comme graphe.

On voit comment les contrôles associés à la position de la parabole permettent de discriminer courbe et graphe.

Rôle de x et y

Le rôle symétrique ou non des variables apparaît comme un critère déterminant dans la distinction courbe / graphe Le rôle des variables x et y est symétrique dans l'équation de la courbe parabole (« les coordonnées x et y d'un point de la courbe vérifient l'équation de la courbe ») et dissymétrique pour le graphe parabole (dans le registre graphique la dissymétrie peut se voir de la manière suivante : deux points du graphe ne peuvent pas avoir la même abscisse et peuvent avoir la même ordonnée).

En situation 1, le basculement d'un rôle symétrique à un rôle dissymétrique de x et de y s'opère de manière relativement « transparente » lorsque la parabole est un graphe et que son équation $ax^2+bx+cy+d = 0$ est écrite $y = \frac{-1}{c}(ax^2+bx+d)$ (montrant la dépendance de y à x, mais répondant aussi aux usages d'écriture) En situation 2, y ne peut plus être variable dépendant de x (les usages de la classe ne fonctionnent plus). Un contrôle dans le registre graphique sur la position de la parabole dans le repère (pour un x il y a deux y) permet de faire le choix d'un changement de repère dans lequel la parabole est un graphe (pour un X il y a un seul Y) et son équation est la représentation algébrique d'une fonction où une variable est dépendante de l'autre (Y = f(X)). Cette contrainte apportée par la situation 2 peut permettre d'éclairer les contrôles qui sous-tendaient le choix d'un changement de position de la parabole. On peut en effet faire l'hypothèse que le jeu sur la dépendance fonctionnelle entre x et y n'est possible que si la parabole est vue comme le graphe d'une fonction et que, de ce point de vue, ce sont des contrôles sur la propriété « être un graphe » qui régissent les décisions sur les représentations graphique (trouver un repère dans lequel la parabole est le graphe d'une fonction) et algébrique (accéder à la représentation algébrique d'une fonction).

Les contrôles et les opérateurs relatifs aux rôles de x et y permettront de distinguer les conceptions courbe et graphe

Analyse de l'activité de deux paires d'élèves: Sylvain/Loïc et André/Rémi

L'analyse porte sur l'enregistrement des conversations de deux binômes, Sylvain/Loïc et André/Rémi, et de leurs actions menées dans Cabri. Nous avons choisi ces deux binômes en vue d'illustrer les différences entre les deux conceptions courbe et graphe. Les propos des élèves sont notés en italique ; le déroulement de la séance est présenté, à partir d'extraits, dans l'ordre chronologique.

Sylvain et Loïc

Situation 1:

1. L'équation de la parabole (en position oblique) n'est pas une fonction:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Les élèves lisent les consignes : on demande une équation de la parabole, qui est alors en position oblique (l'équation est $1{,}28x^2-1{,}56xy+0{,}47y^2-8{,}41x+3{,}63y+10=0$) Loïc observe l'équation à l'écran, et formule : *ce n'est pas une fonction.* Sylvain confirme : *« Ce n'est pas une fonction, . il y a deux images pour chaque.*	Cette déclaration est motivée par l'aspect compliqué de l'équation *(elle est monstrueuse)* *« Ce n'est pas une fonction »* est contrôlé dans le registre graphique (contrôle de type « vertical line test »)

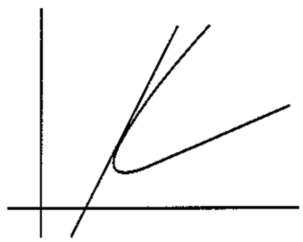
2. L'équation d'une tangente *se calcule en dérivant:*
On demande une équation de la tangente en M_0. Pour les élèves, cela signifie *dériver* l'équation de la parabole. *(Il faut calculer l'équation de la tangente ... Donc il faut dériver.)*

3. On ne peut pas *dériver* l'équation de la parabole (en position oblique):

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Sylvain propose de *dériver* l'équation ($1{,}28x^2-1{,}56xy+0{,}47y^2-8{,}41x+3{,}63y+10=0$)	Pas de conflit avec le fait que l'équation *ne soit pas une fonction*
Loïc : *Tu veux dériver ? Tu veux calculer à la main ?*	*Dériver*, c'est faire du calcul

Ces expressions algébriques sont soumises à des contraintes qui nous permettent de préciser ce que signifie *dériver* pour les élèves.

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Loïc demande si l'équation ($1{,}28x^2-1{,}56xy+0{,}47y^2-8{,}41x+3{,}63y+10=0$) est *dérivable*. Sylvain : *Pour dériver, il faut mettre l'équation sous la forme y = .. ou f(x) quand x .. ; on ne peut pas avoir des x et des y.*	Une pratique nouvelle (*dériver* l'équation) amène un nouveau contrôle sur la forme de l'équation (contrôle du registre algébrique). Il peut s'agir pour Sylvain de faire rentrer l'équation dans la classe des objets rencontrés dans les exercices sur la *dérivation* en classe de mathématiques

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Sylvain affirme que l'équation *n'est pas une fonction* et ne peut pas être *dérivée*. Il formule un nouveau problème : *Comment on calcule une tangente quand on a pas une vraie fonction ?*	Sylvain assujetti *dériver* et *fonction* aux contrôles suivants : Pour Sylvain, les équation que l'on peut *dériver* sont de la forme « y = (expression de x) » et ces équations sont des *fonctions*. Ceci sera explicité lors de la rédaction par *nous avons transformé l'équation en fonction* (décrivant l'action de placer la parabole dans une position où l'équation s'écrit $y = \ldots$)
Dériver paraît difficile à Loïc : *Il faut dériver, ça me paraît chaud, quoique non en fait (...) Peut-on dériver quelque chose qui n'est pas une fonction ? Est-ce que c'est dérivable ce machin là ?*	Le contrôle sur l'action *dériver* est le même que celui permettant de déterminer si l'équation est une fonction : l'aspect compliqué de l'équation. Mais cela ne suffit pas à conclure pour la *dérivation*
Loïc essaie de contourner le problème de la *dérivation* : il recherche une caractérisation géométrique de la tangente : *C'est une droite qui passe par un point de la courbe.* Il trace sur son brouillon le dessin suivant:  Cette stratégie n'aboutit pas et Loïc propose de déplacer la parabole : *pourquoi on la changerait pas de position, on la mettrait plus sympathique pour que l'équation elle soit mieux?*	Loïc abandonne les pratiques du registre algébrique (dériver) et se place dans le registre graphique (où la parabole est vue comme un objet, une forme). On peut penser que les deux opérateurs (« dériver » et « définir la tangente comme droite passant par un point de la parabole ») sont respectivement associés aux deux objets graphe et courbe.

4. Discrimination d'une position particulière de la parabole:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Sylvain cherche alors à rendre l'axe de symétrie de la parabole parallèle à l'axe des ordonnées. Il prévoit que les xy vont disparaître : *Regarde, en se débrouillant bien, regarde le xy il va disparaître (...) Si on l'avait parfaitement parallèle, ça aurait été une courbe de type x^2 (...) il y a du x, du x^2, du y et de l'indépendant.*	Sylvain attribue à l'équation d'une parabole verticale la propriété de s'écrire $y = x^2$ ou $y = ax^2+bx+c$ (sans xy)

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Sylvain ne parvient pas à faire disparaître les xy (le coefficient est 0,01), mais pour lui, c'est l'imprécision de la manipulation qui l'empêche de le faire: *on n'arrive pas à les faire très parallèles.*	Cette propriété résiste, bien que la manipulation rende difficile le positionnement vertical
La parabole se cale en position verticale, l'équation est $2{,}38y = 3{,}33x^2 - 10x + 1{,}53$ Sylvain : *Tu peux dériver maintenant*	Ainsi, comme cela a été dit plus haut, les expressions algébriques que l'on peut *dériver* s'écrivent « y = expression de x
Loïc : *Elle est sympa, ça y est on a une parabole*	Pour Loïc, par contre, le choix de la position verticale est motivé par la simplification de l'équation, la reconnaissance d'une équation connue La position verticale est vue comme une bonne position où l'équation se simplifie

5. Les élèves obtiennent, à l'aide de l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ », une équation de la tangente:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Loïc met l'équation de la parabole sous la forme $y = 3{,}33/2{,}38x^2-10/2{,}38x+1{,}53/2{,}38$ et calcule $f'(x)=6{,}66/2{,}38x-10/2{,}38$. L'équation de la tangente est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ où x_0 est remplacé par 1,14 et $f(x_0)$ est remplacé par $f(1{,}14)=3{,}33/2{,}38\ 1{,}14^2-10/2{,}38\text{x}1{,}14+1{,}53/2{,}38$ (1,14 est l'abscisse de M_0 affichée par Cabri)	« x », dans l'expression de f, est l'abscisse d'un point (x est en relation avec le registre graphique) et l'expression algébrique de f est opératoire.

La tangente est tracée avec la macro-construction permettant de tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne Elle est validée par superposition avec « tangente vérif »

Situation 2:

1. Informations sur les contrôles de choix de la position verticale en situation 1:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Les élèves s'aperçoivent que la parabole ne peut plus atteindre la position verticale et que la stratégie mise en place en situation 1 ne fonctionne plus	
Loïc propose de mettre la parabole en position horizontale: (...) *C'est mieux qu'une position quelconque.*	Loïc voit la position verticale comme une bonne position où l'équation se simplifie La discrimination de certaines positions de la parabole est contrôlée dans le registre algébrique au niveau de l'équation et ce contrôle ne permet pas de distinguer les situations 1 et 2.
Loïc approche la parabole de la position horizontale et Sylvain ne comprend pas que le coefficient de x^2 soit prêt de s'annuler alors que l'axe de la parabole n'est pas du tout parallèle à l'axe des ordonnées (il n'a pas remarqué que, cette fois, ce sont les x^2 et pas les y^2 qui disparaissent).	Pour Sylvain, mettre la parabole en position horizontale ne permet pas de résoudre le problème comme en situation 1 La forme des expressions algébriques accessibles à la dérivation (y = expression de x) est associée à un contrôle du registre graphique que ne satisfait pas la position horizontale.
Sylvain (parlant de l'équation de la parabole horizontale qui ne comporte plus de xy) : *c'est pas mieux, ça revient au même, tes y^2 t'en fait quoi ?*	

2. Reconnaissance du caractère non symétrique de x et de y:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
La parabole se cale en position horizontale, l'équation est $3{,}08y^2-2{,}04x+9{,}23y = 0$.	La forme $x-f(y) = 0$ empêche la stratégie précédente d'être opérante
Sylvain : (...) *Là je vois pas comment tu peux t'en sortir avec les y^2 quand même.*	Ce changement de repère est contrôlé visuellement (avoir un repère dans lequel la parabole est verticale, tournée vers le haut) La dissymétrie des rôles de x et y est identifiée dans le registre graphique (et ainsi, la parabole est reconnue comme graphe).
Sylvain propose un changement de repère (rotation de $\pi/2$ autour de l'origine)	
Loïc ne comprend pas ce qu'apporte le changement de repère. Distingue-t-il les rôles de x et de y, distingue-t-il les situations 1 et 2?	Ce qui tend à confirmer que, pour Loïc, le critère de réussite de la situation 1 est la simplification de l'équation. La parabole est une courbe (objet autonome du registre graphique). Le changement de repère ne modifie pas la nature de cette courbe (même forme)

3. Les élèves obtiennent, à l'aide de l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », une équation de la tangente:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Les élèves effectuent un changement de repère correct relativement à leur intention ($X = -y$ et $Y = x$). L'équation de la parabole est calculée dans R' ($3{,}08X^2-2{,}04Y-9{,}23X=0$). Ils calculent, comme en situation 1, une équation de la tangente de la forme $Y = f'(X_0)(X-X_0)+f(X_0)$.	Le changement de repère est appliqué à M_0 (X_0 est l'abscisse de M_0 dans R'). La valeur de $f(X_0)$ est calculée à partir de l'équation de la parabole dans R'
Un changement de repère inverse ($-X = y$ et $Y = x$) permet d'obtenir l'équation de la tangente dans le repère par défaut R de Cabri.	La tangente est tracée et validée par les élèves par superposition avec « tangente vérif »

André et Rémi:

Situation 1:

1 Une équation de tangente se calcule en dérivant:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Les élèves lisent les consignes qui leurs demandent de tracer la tangente et d'en donner une équation. - *On doit calculer à la main* (parle de l'équation de la tangente), *bon dériver alors*	Trouver l'équation de la tangente signifie *dériver* l'équation de la parabole
- *C'est pas possible, on peut pas là. Ce qu'on peut faire, c'est changer l'équation de la parabole.*	Rémi exprime qu'on ne peut pas *dériver* l'équation et décide de bouger la parabole pour changer l'équation. Il parlera plus tard *d'équation arrangée*
Les élèves recherchent une position pour la parabole : - Les y^2 disparaissent dans l'équation : *C'est déjà mieux.* - Le coefficient de xy diminue (0,06) : *C'est presque parfait.* - Il n'y a plus de y^2 et de xy (l'équation est $3{,}39x^2-10x-2{,}37y+1{,}55 = 0$): *C'est bien.*	Plus qu'une position, les élèves choisissent une équation conforme à la *dérivation* L'équation est écrite de façon à fournir l'expression algébrique f(x) à *dériver* *Dériver* opère sur des expressions algébriques de la forme y=(expression de x).
Loïc commente sur la nouvelle équation : *Je t'ai donné l'équation, je t'ai donné f(x).*	

Rien n'indique dans le protocole que les élèves donnent un sens fonctionnel à ces expressions ou que la parabole en position verticale est reconnue comme graphe. La parabole est une courbe, dont certaines positions donnent des propriétés à l'équation (*être une équation connue,* se mettre sous la forme « y=expression de x », être *dérivable*).

2 Opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ »:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Rémi et André : *L'équation* (de la tangente) *c'est f prime de a facteur de x moins a plus f de a* Rémi : tu fais la dérivée Les élèves obtiennent une équation de la tangente *(application de la tangente en a)* La tangente est tracée (utilisation de la macro). Elle est validée par superposition avec « tangente vérif ».	a et f(a) sont l'abscisse et l'ordonnée de Mo affichées à l'écran. La position verticale rend l'équation conforme à l'application de l'opérateur « <u>si</u> f est une fonction, <u>alors</u> l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », nécessitant le traitement de la *dérivation (tu fais la dérivée).*

Situation 2:

1. Informations sur les contrôles de choix de la stratégie en situation 1:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Les élèves s'aperçoivent que la parabole ne peut plus atteindre de position verticale et Rémi propose une autre position. Les élèves rapprochent assez rapidement la parabole de la position horizontale. Ils cherchent à simplifier l'équation : *On peut virer les x.* Finalement, l'équation $12y^2-8x+36y+39 = 0$ apparaît à l'écran. Cette équation est estimée *sympathique*, la *meilleure* qu'ils puissent obtenir, bien qu'ils semblent ne pas savoir comment la traiter.	Pour André et Rémi, le contrôle de mise en œuvre de la stratégie précédente est la simplification de l'équation en vue de lui appliquer les opérations de dérivation, contrôle qui leur permet de sélectionner la position horizontale en situation 2

2. Reconnaissance du caractère non symétrique de x et y:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Les élèves ne peuvent toutefois plus appliquer la stratégie précédente et Rémi propose de remplacer les x par des y et les y par des x dans l'équation $12y^2-8x+36y+39 = 0$: *On peut essayer de changer toutes les variables [...] Les x on les remplace par des y et les y on les remplace par des x.*	Rémi cherche à obtenir une équation conforme aux calculs de la *dérivation*. Les variables x et y se distinguent par leur dissymétrie dans l'écriture des équations accessibles pour eux (forme y = (expression de x)), sans que cette dissymétrie ne prenne de sens dans le registre graphique
Le problème de la légitimité d'un tel échange se pose aux élèves. Rémi propose alors un changement de repère (rotation de $-\pi/2$ du repère, $Y = x$ et $X = -y$): *Ouais, on dit qu'on a une rotation. Après on fait ( ) On dit que x égal ( ) moins y et on dit que y égal ( ) moins x. non ?*	La rotation permet de légitimer l'interversion des symboles x et y

3. Interprétation de a, de f(a), de x:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
Relevé du brouillon des élèves : *12y²-8x+36y+39 = 0*: *12X²-8Y-36X+39 = 0* *f(x) = 1,5X²-4,5X+2,87* *f'(x) = 3X-4,5*	
f'(a)(x-1,74)+f(a) *y = -1,22x-17,14*	Le changement de repère n'est pas appliqué à M_0: les valeurs données à a et f(a) restent l'abscisse et l'ordonnée de M_0 dans le repère initial de Cabri
-1,22x-y-17,14 = 0	L'équation de la tangente est écrite avec les variables petit x et petit y et la tangente est tracée par les élèves dans le repère de Cabri.
Les élèves travaillent avec l'équation 12X²-8Y-36X+39 = 0 comme en situation 1, dans le repère de Cabri	L'interprétation graphique du changement de variable (rotation du repère) permet d'écrire correctement ce changement (x = Y et y = -X). Le reste du problème (opérateur « équation de la tangente ») se résout dans le registre algébrique, seule l'interprétation de a et f(a) relève du registre graphique Cependant, cette interprétation n'est pas adaptée: a et f(a) ne sont pas des coordonnées X et Y dans le nouveau repère, mais sont les coordonnées de M_0 dans le repère de Cabri visible à l'écran.

Les élèves cherchent à obtenir une équation de la forme y=f(x) qui leur permette de traiter (au sens des règles d'écriture de la dérivation) une expression de x et *d'appliquer* l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ » Sur leur brouillon, l'écriture x de f(x) et de f'(x) reste minuscule et n'est pas affectée par le changement de variable: f(x) et f'(x) sont un formalisme, une écriture symbolique qui permet d'exprimer l'expression à traiter (au sens du traitement des écritures); x et y ne prennent ni le sens de quantités variables, ni le sens de quantités inconnues.

Les valeurs données à X et Y sont l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la parabole dans le repère de Cabri et ne sont pas l'abscisse et l'ordonnée d'un point de la parabole dans le nouveau repère La parabole est lue dans le repère à l'écran et, ainsi, ne peut pas être reconnue comme graphe.

Il y a en quelque sorte un cloisonnement des registres. L'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ » est un processus de traitements symboliques, sans relation avec le registre graphique. L'équation est un « *nom* » pour la parabole (ce n'est pas la parabole qui représente une certaine relation entre x et y décrite par l'équation, mais l'équation qui désigne la parabole); certaines positions de la parabole rendent l'équation accessible à ces traitements d'écriture.

4 La tangente est invalidée:

Action et Propos des Eleves	Commentaires
La tangente est tracée (à l'aide de la macro permettant de tracer une droite dont on connaît une équation cartésienne) dans le repère de Cabri La tangente est invalidée Les élèves passent le reste de la séance à reprendre leurs calculs.	Les rétroactions du milieu ne permettent pas aux élèves de modifier leur stratégie La tangente tracée est suffisamment proche de « tangente vérif » pour que les élèves pensent avoir fait une erreur de calcul (notamment, leur tangente passe par M_0). Repère de Cabri visible à l'écran

Caractérisation des conceptions « graphe » et « courbe »

Pour Sylvain et Loïc, comme pour André et Rémi, trouver l'équation de la tangente à la parabole signifie *dériver* l'équation de la parabole et mettre en œuvre l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ ». Cependant, cet opérateur est assujetti par chacun des deux groupes à des contrôles différents, ces contrôles permettent de caractériser des conceptions différentes

Conception « graphe » (le cas de Sylvain et Loïc)

Des contrôles du registre graphique (reconnaître la parabole comme un graphe, lire la situation dans un nouveau repère) sont associés à des outils du registre algébrique (opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ », changement de variables). Ces relations permettent à l'activité des élèves de se référer à la parabole comme graphe d'une fonction et à x et y comme variables liées par une équation ou par ce graphe.

Conception « courbe » (le cas d'André et Rémi)

Le contrôle associé à l'opérateur « si f est une fonction, alors l'équation de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ » est algébrique (équation de la forme « y = expression de x ») La parabole est un objet graphique pour qui l'équation est un *nom* et certaines des positions de cette parabole sont plus ou moins opérationnelles du point de vue du contrôle sur l'équation. Les transformations dans le registre algébrique (changements d'écritures $X = -y$ et $Y = x$) n'opèrent pas sur les objets du registre graphique (le point M_0, la tangente). Et ainsi, les actions des élèves sont réduites à des manipulations symboliques.

Conclusion

L'analyse que nous venons de présenter montre que les dimensions « actions », « contrôles » et « registres de représentation » jouent pour la différentiation des conceptions. On voit en particulier comment celles-ci peuvent se différencier au niveau des contrôles. En effet, une partie importante de l'activité des deux groupes est conduite dans le registre algébrique. Pour André et Rémi, ce registre entretient des rapports avec le registre graphique, mais aucune action ou contrôle propres au registre graphique n'est mise en oeuvre: l'équation est l'un des *noms* de la courbe (certains de ces *noms* sont accessibles au traitement symbolique de la *dérivation*). Pour Sylvain et Loïc, l'activité mise en oeuvre dans le registre algébrique prend son sens au travers de contrôles qui relèvent du registre graphique (type « vertical line test »). Ainsi, la parabole est reconnue par les élèves comme graphe et cela permet au calcul algébrique de se rapporter aux manipulations de relations entre variables.

Nous rejoignons et précisons une partie du travail de Sierpinska en montrant que différents types de relations entre les registres algébrique et graphique peuvent se nouer. Les travaux de Sierpinska nous permettaient de penser que la représentation graphique d'une fonction pouvait être conceptualisée comme une ligne, sans identification d'une relation entre abscisse x et ordonnée y; par ailleurs, ils montraient que la représentation algébrique pouvait être vue comme un *nom* et perdre son caractère opératoire. Notre travail montre comment ces deux aspects peuvent intervenir dans la résolution d'un problème par les élèves (conception *courbe*). Il nous montre aussi que la conceptualisation graphe nécessite d'établir un lien entre la relation fonctionnelle définie par le *graphe* et celle définie par l'expression algébrique.

Nous avons perçu qu'une part importante des *images* et *définitions* de la notion de fonction identifiées par Vinner porte sur des attributs des registres algébrique et graphique. Nous nous sommes alors interrogé sur ce que peut signifier pour les élèves la reconnaissance (ou la non-reconnaissance) de certaines de ces caractéristiques pour la résolution d'un problème particulier. De ce point de vue, notre approche se différencie de celle de Vinner: nous nous intéressons à la caractérisation des conceptions engagées dans la résolution d'un problème. En cela, elle nous semble offrir un éclairage sur la façon dont les conceptions des étudiants s'actualisent pour résoudre un problème de mathématiques: Quels opérateurs sont mobilisés? Quels contrôles sous tendent et valident leur choix? En particulier, c'est bien l'identification de certains des contrôles engagés dans la résolution du problème qui a permis de montrer que des relations différentes se nouent entre les registres, révélant ainsi des conceptions différentes.

Chacune des activités des deux groupes fait appel à la fois au registre graphique et au registre algébrique mais s'associe à un cadre qui lui est propre (algébrique pour la conception « graphe » et géométrique pour la conception « courbe »). Les relations différentes entretenues par les registres de représentation avec les opérateurs et contrôles, les interactions entre registres et entre les dimensions d'une conception rendent possible la distinction de ces deux cadres, mettant ainsi en évidence que les notions de « cadre » (Douady 1985) et de « registre » ne se superposent pas. La conception « courbe » semble pouvoir ouvrir l'activité sur un jeu de cadres géométriques/algébriques intéressant.

Dans le fonctionnement particulier de notre situation, les conceptions de fonction interagissent avec les conceptions d'une tangente *(trouver l'équation d'une tangente c'est dériver,* ou *la tangente est la droite qui passe par un point de la courbe* (Loïc)), avec les conceptions de x et de y (en tant que variables, inconnues, écritures symboliques,...). L'émergence de ce champ conceptuel est d'une certaine manière liée à notre situation particulière. Cependant, les conceptions ont une dimension opératoire: c'est par leur manifestation comme outils dans un problème particulier, en situation concrète, que l'existence d'une conception peut être attestée. La définition de la classe des problèmes (des manuels scolaires par exemple) impliquant (au moins explicitement) le concept de fonction permettrait de préciser les éléments de ce champ.

Les élèves ne font d'analyse fonctionnelle qu'en classe de mathématiques. C'est par la situation, mais aussi par ce qui a été fait en classe, que les conceptions des élèves sont activées. Autour de quelles pratiques se situent les activités d'analyse fonctionnelle menées en classe par l'enseignant et les élèves? A-t-on caractérisé des conceptions qui fonctionnent sur les problèmes de la classe? C'est-à-dire, permettent-elles d'aboutir à une réponse juste pour l'élève et l'enseignant?

Si ce n'est pas le cas, que nous apprennent les conceptions que nous avons caractérisées? Par exemple, nous pouvons penser que rendre la parabole verticale pour André et Rémi (ce qui, nous l'avons montré, ne signifie pas qu'elle soit un graphe) signifie la faire rentrer dans la classe des objets qui relèvent de la sphère de pratique de l'enseignement. Si notre approche épistémologique nous permet de mieux comprendre le fonctionnement des conceptions des élèves en résolution de problèmes, elle demande à être complétée pour permettre la prise en charge des facteurs didactiques.

Notes

[1] Les représentations des fonctions utilisées dans l'enseignement secondaire sont essentiellement des représentations du registre algébrique ($f(x)$ représentée par une expression algébrique) et du registre graphique (graphe d'une fonction)

[2] Nous préciserons les raisons du choix de la terminale scientifique.

[3] Pour les autres obstacles, se référer aux travaux à Sierpinska [1992]

[4] Dans les pages qui suivent, nous définirons précisément les objets (et les conceptions) « graphe » et « courbe »

[5] « Registre » est pris au sens de Duval

[6] Jean-Marie Laborde et Franck Bellemain: conception et développement de Cabri-Géomètre, Imag, CNRS, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[7] Ce mode de « validation » est souvent adopté dans les activités de type « boîte noire » prenant place dans un environnement tel que Cabri.

[8] Dimathème TS (1994) Editions Didier et Terracher TS (1995) Editions Hachette

[9] Qui peuvent être des opérateurs ou des contrôles (au sens définis précédemment) en fonction de la situation en référence.

[10] Voir ci-dessus les *images* mises en évidence par Vinner

Références et bibliographie

Artigue, M. (1993) 'Enseignement de l'analyse et fonctions de référence', *Repères IREM* 11, 115-139

Artigue, M. (1998) 'L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse', *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18**(2), 231-261

Balacheff, N. (1995) 'Conception, connaissance et concept', Grenier, D (ed.), *Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques*. Séminaires 1994-1995, Grenoble, Université Joseph Fourier, France.

Bloch, I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse présentée à l'Université de Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1983) 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques* **4**(2), 165-198.

Brousseau G. (1986) 'Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Douady, R. (1985) 'The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability', in *Proceeding of the*

Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht: State University of Utrecht, **2**, pp. 33-52

Duval R. (1995) *Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels,* Paris, Editions Peter Lang.

Hitt-Espinosa, F (1998) 'Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg **6**, 7-26.

Sierpinska, A (1992) 'On Understanding the Notion of Function', in Harel, G and Dubinsky, E (eds), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* Mathematical Association of America, MAA notes **25**, pp 25-58.

Sierpinska, A. (1994) *La Compréhension en Mathématiques: La Spirale. Collection en Didactique des Mathématiques,* Editions Modulo

Vinner, S. (1989) 'Images and definitions for the concept of function', *Journal for Research in Mathematics Education* **20**(4), 356-366

Vinner, S (1992) 'The function concept as a prototype of mathematics learning', in Harel, G and Dubinsky, E, (eds) *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy,* Mathematical Association of America, MAA notes **25**, pp 195-214