CONFUSION AUTOUR DU CONCEPT DE PROBABILITÉ

MATHIEU THIBAULT, VINCENT MARTIN

Il y a près de 20 ans, Pratt (1998) a avancé dans cette revue qu'une différence entre les sens attribués au concept de probabilité dans les langages courant et mathématique est un obstacle à l'apprentissage des probabilités. De notre côté, nous avons remarqué l'existence d'une confusion autour de l'expression « probabilité fréquentielle ». Au Québec, l'expression « probabilité fréquentielle » semble avoir été introduite dans les programmes scolaires des années 2000. Elle est couramment utilisée dans le système scolaire. On la retrouve dans plusieurs ressources éducatives québécoises telles que dans les documents ministériels (comme le *Programme de formation de l'école québécoise* et la *Progression des apprentissages,* au primaire et au secondaire), des manuels scolaires et des ressources numériques (comme *Netmath*). On la rencontre ainsi assez régulièrement dans des énoncés de problèmes du type : lorsqu'on lance 100 fois un dé à six faces et qu'il montre 19 fois la face 3, la « probabilité fréquentielle » d'obtenir un 3 est de 19%.

Au cours de la dernière décennie, on retrouve aussi l'expression « probabilité fréquentielle » dans le discours de chercheurs québécois, à la fois dans des thèses et mémoires, des revues scientifiques, des actes de colloques scientifiques et des revues professionnelles. Or, certains auteurs d'autres pays ont questionné l'expression « probabilité fréquentielle ». Aux États-Unis, Konold *et al.* (2011) affirment clairement l'existence d'une confusion entre le concept de « probabilité » et l'observation d'estimations basées sur des fréquences :

> At some point, these frequency-based estimates of probability began being referred to as "experimental" or "empirical" probabilities and defined in a way that obscured the fact that observed ratios were estimates of the probabilities, rather than probabilities themselves. (p. 70)

Dans le contexte européen, Batanero et Borovcnik (2016) critiquent l'utilisation de l'expression « probabilité fréquentielle », car ce sont les fréquences qui sont empiriques, alors que la probabilité est théorique.

> Even though the relationship between probability and relative frequencies is fundamental for the comprehension of probability and statistical methods, this relationship is not always understood as some students confuse frequency with probability. The expression "empirical probability" is unfortunate in this regard as a probability is always theoretical: only the frequencies are empirical. (p. 10)

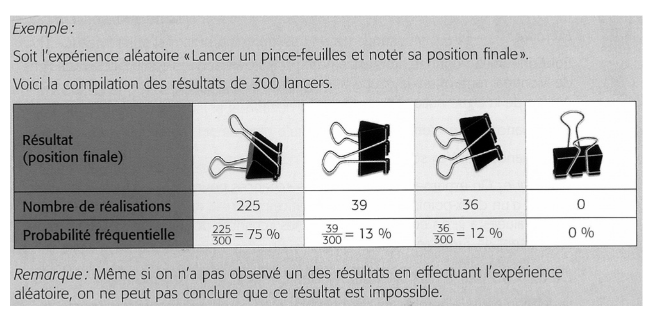
Des expressions synonymes se retrouvent autant en français qu'en anglais : probabilité expérimentale (*experimental probability*), probabilité empirique (*empirical probability*) et probabilité estimée (*estimated probability*). De ces expressions, la dernière est celle qui semble la moins problématique, car elle met l'accent sur le caractère imprécis de ce qui est observé par l'approche fréquentielle. Pour poursuivre la réflexion, nous proposons de distinguer la notion de vraie probabilité et les trois approches probabilistes.

Des définitions de la probabilité

Une probabilité est une grandeur servant à qualifier ou quantifier le caractère aléatoire de la réalisation d'un évènement. Nous verrons plus tard que cette définition conduit à des interprétations particulières selon l'approche probabiliste adoptée. Par exemple, voici comment la « probabilité fréquentielle » est définie dans un manuel scolaire dont l'utilisation est répandue au Québec en 4e secondaire (élèves de 15–16 ans) :

> La probabilité fréquentielle est une estimation faite à partir de résultats observés suite à plusieurs réalisations d'une expérience aléatoire. On doit avoir recours à une expérience aléatoire lorsqu'on ne dispose pas d'un modèle permettant de calculer une probabilité théorique. Lorsque l'expérience aléatoire est effectuée un grand nombre de fois, la probabilité fréquentielle constitue une bonne estimation de la probabilité théorique d'un événement. (Boucher, Coupal, Jacques et Marotte, 2009, p. 183)

Cette définition mentionne que la « probabilité fréquentielle » doit être utilisée lorsqu'on ne peut pas calculer la « probabilité théorique » d'un évènement. Le recours à la « probabilité fréquentielle » permet alors d'estimer la « probabilité théorique » en expérimentant, comme dans l'exemple de la figure 1 (tiré du même manuel) où un pince-feuilles est lancé 300 fois.



Exemple :

Soit l'expérience aléatoire « Lancer un pince-feuilles et noter sa position finale ».

Voici la compilation des résultats de 300 lancers.

Résultat (position finale)				
Nombre de réalisations	225	39	36	0
Probabilité fréquentielle	$\frac{225}{300} = 75\ \%$	$\frac{39}{300} = 13\ \%$	$\frac{36}{300} = 12\ \%$	0 %

Remarque : Même si on n'a pas observé un des résultats en effectuant l'expérience aléatoire, on ne peut pas conclure que ce résultat est impossible.

Figure 1. Exemple de la « probabilité fréquentielle » dans un manuel scolaire (Boucher et al., 2009, p. 183).

For the Learning of Mathematics **38**, 1 (March, 2018)
FLM Publishing Association, Fredericton, New Brunswick, Canada

Cependant, les « probabilités fréquentielles » présentées dans cet exemple (75%; 13%; 12%; 0%) sont-elles vraiment des probabilités? Accepter ces mesures comme des probabilités impliquerait que les probabilités peuvent varier d'une expérimentation à l'autre, ce qui semble dénaturer le concept de probabilité au sens d'une grandeur servant à qualifier ou quantifier le caractère aléatoire d'un évènement. Ces « probabilités fréquentielles » ne sont-elles pas des fréquences relatives qui illustrent une tendance observée plutôt que des probabilités ? Il nous semble en effet que la fréquence observée d'un évènement permet d'inférer (avec plus ou moins de confiance) la probabilité associée à cet évènement, mais qu'elle n'est pas la probabilité elle-même.

En consultant d'autres ouvrages, on remarque que les définitions attribuées à la probabilité au cégep et à l'université diffèrent beaucoup par rapport à celles utilisées au primaire et au secondaire. Par exemple, voici la « définition empirique d'une probabilité » proposée par un manuel utilisé dans plusieurs institutions québécoises au niveau collégial (élèves de 17–20 ans) :

> Soit A, un événement associé à une expérience aléatoire. Si l'expérience aléatoire est répétée N fois dans les mêmes conditions et si l'événement A se réalise n_A fois, on définit la probabilité de l'événement A, que l'on note $P(A)$, comme étant la limite de la fréquence relative n_A/N lorsque N devient infiniment grand, ce qu'on écrit :
>
> $$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}$$
>
> (Ouellet, 1998, p. 177)

Évidemment, on observe une rupture entre cette définition de « probabilité fréquentielle » et la précédente par rapport au niveau de formalisme. Mais on peut également remarquer que cette dernière définition présente la probabilité comme une limite. Cela met en évidence le caractère évolutif de la fréquence relative observée, élément qui n'était pas mis de l'avant dans la définition de Boucher *et al.* (2009).

Dans un ouvrage de probabilités au niveau universitaire, Ross (2007) formule une mise en garde par rapport à la notion de « probabilité fréquentielle ». En effet, puisqu'on ne peut pas répéter infiniment une expérience aléatoire, la fréquence obtenue n'est jamais suffisamment précise pour atteindre exactement la probabilité. La fréquence relative ne peut donc que tendre vers une valeur limite, qui est la probabilité. C'est la loi des grands nombres qui nous indique qu'il est probable que cette fréquence soit la valeur limite de la probabilité. Toutefois, Ross (2007) souligne qu'il est problématique de définir la probabilité comme une fréquence limite :

> [La probabilité de l'évènement] est définie comme la limite du pourcentage du nombre de fois où [l'évènement] survient par rapport au nombre total de répétitions. C'est donc la fréquence limite de [l'évènement]. Bien que [cette définition] soit intuitivement commode et qu'elle doive toujours rester à l'esprit du lecteur, elle possède un sérieux inconvénient. Nous ne savons en fait pas si [le nombre de fois où l'évènement survient dans *n* répétitions] va converger vers une limite constante qui sera la même pour chaque séquence de répétitions de l'expérience. Dans le cas d'un jet d'une pièce par exemple, peut-on être sûr que nous obtiendrons de nouveau la même proportion limite de piles si l'expérience est entièrement répétée une deuxième fois ? (p. 33)

Dans cet extrait, Ross mentionne qu'on ne peut tenir pour acquis que la fréquence relative converge vers la probabilité d'un évènement d'une expérience aléatoire. Il se questionne sur la possibilité de savoir avec certitude qu'il y aura convergence vers une valeur limite à l'infini, étant donné que l'infini est un concept théorique qu'on ne peut pas « vérifier » sur le plan expérimental.

Approches probabilistes et notion de vraie probabilité

Cette réflexion sur l'expression « probabilité fréquentielle » peut être située conceptuellement en abordant différentes approches probabilistes. De manière générale, les travaux réalisés dans le champ de la didactique des mathématiques (ou plus largement en *mathematics education*) distinguent trois grandes approches probabilistes.

D'abord, l'approche théorique est traitée la plus régulièrement et est donc considérée comme l'approche classique (Batanero, 2014). Historiquement, l'origine de cette approche remonte aux travaux de Laplace. À cette époque, elle était la seule (et donc la première) approche existante, alors le concept de probabilité s'est trouvé rattaché à celle-ci. Dans cette approche, la probabilité se calcule à partir du rapport entre les nombres de cas favorables et possibles d'un évènement donné, lorsque tous les cas sont jugés équiprobables. Ainsi, on ne peut pas calculer (théoriquement) l'évènement « obtenir un 4 » avec un dé déséquilibré. Pour approcher la probabilité d'un tel évènement, on peut mesurer sa fréquence relative à la suite d'une série de données observées. Il s'agit de l'approche fréquentielle, que von Mises (1928/1952) et Renyi (1966) ont été parmi les premiers à aborder dans leurs travaux. Or,

> la fréquence relative d'un évènement a tendance a devenir constante lorsque le nombre d'expériences ou d'observations augmente. Cette stabilisation de la fréquence relative d'un évènement dans une longue suite d'expériences ou d'observations, répétées dans des conditions uniformes, a été observée depuis fort longtemps. Cette observation amène a formuler le principe suivant: si dans les mêmes conditions, on répète une expérience aléatoire indéfiniment, la fréquence relative d'un évènement associé à cette expérience tend vers une valeur limite. (Ouellet, 1998, p. 177)

La valeur limite permet d'approcher la probabilité de l'évènement considéré. Néanmoins, de la même manière que la « probabilité théorique » a été associée à l'approche théorique, l'idée de « probabilité fréquentielle » s'est trouvée rattachée à l'approche fréquentielle.

Enfin, on trouve dans les écrits scientifiques et les ressources éducatives une autre manière, presque marginale, de traiter de probabilités : l'approche subjective. Dans cette approche, sur laquelle portent les travaux fondateurs de Lindley (1980), un individu évalue quantitativement ou qualitativement la force ou le degré d'une croyance a travers une analyse plus ou moins intuitive de l'information dont il dispose. Cette évaluation, qui est subjective dans la mesure où elle varie selon la personne qui la produit, est habituellement appelée la « probabilité subjective » (*subjective probability*). Puisque l'approche subjective ne permet pas de déboucher sur la probabilité elle-même, mais plutôt d'approcher cette probabilité, nous proposons d'utiliser l'expression « opinion probabiliste » plutôt que l'expression « probabilité subjective ».

On voit donc trois approches probabilistes qui permettent d'approcher une probabilité. Plus précisément, 1) une probabilité est calculée dans l'approche théorique; 2) une fréquence relative est observée dans l'approche fréquentielle et 3) une opinion probabiliste est exprimée dans l'approche subjective. Au-delà de ces approches probabilistes, Konold et al. (2011) ont proposé de considérer la notion de vraie probabilité (*true probability*). Celle-ci correspond à une valeur unique et spécifique qui représente la probabilité qu'a un évènement de se produire, mais qui demeure abstraite puisqu'elle ne peut pas être connue avec exactitude. Cette vraie probabilité n'est pas équivalente à la probabilité associée à des phénomènes de la vie réelle. La notion de probabilité est plutôt dérivée d'une modélisation qui émerge du phénomène considéré. Cette modélisation est, au mieux, une bonne approximation de ce phénomène. Par exemple, si on s'intéresse à la probabilité d'obtenir « pile » avec une pièce de monnaie, on dira qu'elle est de ½, mais il n'y a pourtant pas de bonne raison de croire qu'une pièce de monnaie ait exactement la même probabilité de tomber sur pile ou sur face puisqu'elle ne peut jamais être parfaitement équilibrée. En effet, l'approche théorique suppose qu'on travaille avec des situations « parfaites » (par exemple, des pièces parfaitement équilibrées et sans épaisseur), en admettant que la situation ne change pas et ne soit pas affectée par les conditions de l'expérience. Alors que la probabilité d'obtenir pile est la même pour toutes les pièces de monnaie, la vraie probabilité de cet évènement pour une pièce de monnaie donnée pourrait être 0,4999993697. Une façon d'approcher cette vraie probabilité est de recueillir des données à partir de la situation réelle et de comparer la probabilité avec la fréquence relative résultante de l'approche fréquentielle. Toutefois, la vraie probabilité peut changer dans le temps si la pièce est modifiée légèrement à la suite de nombreux lancers (par exemple avec l'usure). Cela nous amène à dire que la vraie probabilité n'est pas une valeur fixe puisqu'elle dépend d'une multitude de paramètres. Celle-ci est donc située contextuellement et peut évoluer dans le temps.

La réflexion de Konold *et al.* (2011) sur la notion de vraie probabilité implique que la fréquence relative en cours de stabilisation dans une expérimentation permette d'approcher la vraie probabilité (et non pas la probabilité comme résultante de l'approche théorique), que l'on ne peut pas connaître. Cette notion de vraie probabilité importe notamment dans le lancer d'un objet irrégulier, pour lequel il n'est pas possible de calculer les probabilités d'obtenir l'une ou l'autre des faces. Par exemple, Konold *et al.* (2011) utilisent un os de cerf dont les faces sont irrégulières. Ceux-ci soutiennent que l'approche fréquentielle permet alors à long terme de voir la fréquence relative tendre vers la vraie probabilité. Étant donné que cette situation ne permet pas de calculer la probabilité, ces auteurs suggèrent de réaliser physiquement une telle expérience aléatoire. Dans cette situation, faute de pouvoir approcher la vraie probabilité par l'approche théorique, il devient nécessaire de réaliser une démarche qui s'inscrit dans l'approche fréquentielle, en cumulant les essais.

Modèle des relations entre les approches probabilistes et la vraie probabilité

Nous proposons maintenant, dans la figure 2, un modèle des relations entre les trois approches probabilistes (encadrées), leur résultante (en caractères italiques) qui s'obtient d'une façon particulière à chaque approche (flèche avec verbe) et la notion de vraie probabilité (en caractères gras).

La vraie probabilité se trouve au centre du modèle dans un ensemble fermé, car elle représente la valeur inatteignable et abstraite vers laquelle les résultantes des différentes approches, prises individuellement ou de façon combinée, tendent à leur manière (flèches pointillées dans la figure 2). Par l'approche fréquentielle, c'est à travers l'augmentation de la taille de l'échantillon dans le cadre d'une expérimentation qu'on observe une fréquence relative pour approcher la vraie probabilité. Par l'approche subjective, c'est avec l'accumulation d'informations pertinentes pour un individu au sujet de l'évènement et de son contexte qu'on exprime une opinion probabiliste pour approcher la vraie probabilité. Par l'approche théorique, c'est avec le rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles qu'on calcule la probabilité pour approcher la vraie probabilité. Au regard de notre définition de la probabilité, on peut dire que ces trois approches produisent des résultantes pour approcher la grandeur servant à qualifier ou quantifier le caractère aléatoire d'un évènement associé à un phénomène. En ce qui concerne la vraie probabilité, elle représente la valeur exacte (dans un contexte et à un moment donné) et abstraite de cette grandeur.

Dans ce modèle, une double distinction est donc faite 1) entre chaque approche et sa résultante respective, puis 2) entre les trois approches probabilistes qui permettent de tendre vers la vraie probabilité d'un évènement. L'ensemble dédié à chacune des approches probabilistes est délimité par des pointillés, car ces ensembles ne sont pas fermés sur

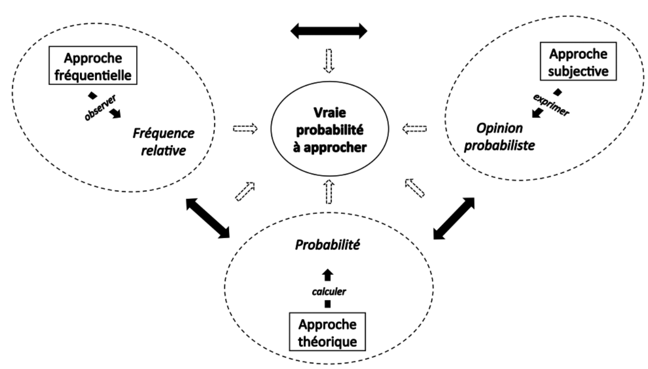


Figure 2. *Modèle des relations entre les approches probabilistes et la vraie probabilité*

eux-mêmes. En effet, des allers-retours et des combinaisons entre les approches probabilistes sont possibles. La figure 2 contient donc trois doubles flèches qui représentent ces possibles combinaisons. Ces combinaisons permettent d'adopter un regard complémentaire pour approcher, lorsque le contexte le permet, la vraie probabilité. Pour illustrer cette idée de combinaisons d'approches, nous suggérons un exemple pour chacune des doubles flèches du modèle proposé. Cela dit, la manière détaillée pour obtenir des résultats afin d'approcher la vraie probabilité en combinant différentes approches est quelque chose qui reste à explorer.

La combinaison des approches fréquentielles et théorique pourrait se faire lorsqu'on réalise des essais avec un dé à n faces pour confirmer l'équiprobabilité associée à l'obtention de chacune des faces (soit $1/n$ si on suppose que les faces sont équiprobables). La prise en considération à la fois de l'observation de la stabilisation des fréquences relatives et du calcul des probabilités ouvre sur une estimation probabiliste qui combine les deux approches, ce qui permet d'approcher la vraie probabilité. La combinaison des approches fréquentielle et subjective pourrait se faire lorsque l'observation de la fréquence relative est mise en relation avec l'expression d'une opinion probabiliste. Pensons par exemple à un citoyen qui cherche la vraie probabilité d'apercevoir un camion de pompier à une intersection donnée du quartier qu'il habite. Cette vraie probabilité pourrait être approchée par le citoyen à partir de son observation de la fréquence de passage, combinée à son opinion probabiliste basée, par exemple, sur une analyse de la proximité de différentes casernes et de la dynamique de la circulation routière. Enfin, la combinaison des approches théorique et subjective pourrait se faire dans le cadre d'une situation où l'expression d'une opinion probabiliste vient s'ajouter au calcul d'une probabilité. Par exemple, un joueur de poker pourrait approcher la vraie probabilité de gagner une main dans le cadre d'une partie. Pour ce faire, celui-ci prendrait en compte à la fois le calcul de la probabilité de détenir la main gagnante en considérant les cartes qu'il connaît (c'est-à-dire les siennes et celles exposées sur la table) et son opinion probabiliste basée sur une analyse plus qualitative d'éléments tirés de l'observation des autres joueurs (par exemple, des facteurs psychologiques comme leurs réactions et stratégies) ou de la dynamique de la partie, etc. Puisque les approches probabilistes peuvent être combinées en paires pour approcher la vraie probabilité, on pourrait aussi penser qu'une combinaison des trois approches probabilistes est possible.

Ainsi, l'approche théorique est la seule permettant de répondre à la question « Quelle est la probabilité de ...? », mais chacune des trois approches offre la possibilité de répondre à la question « Quelle pourrait être la vraie probabilité de...? ». Notre modèle permet donc d'illustrer les façons d'approcher la vraie probabilité à partir d'une (ou de plusieurs) des trois approches.

Stabilisation d'une fréquence relative pour approcher la vraie probabilité d'un événement

Nous approfondissons maintenant l'idée de la stabilisation d'une fréquence relative associée à un évènement pour approcher sa vraie probabilité. Afin d'illustrer la stabilisation de la fréquence relative, nous allons reprendre l'exemple du pince-feuilles présenté dans la figure 1. Selon l'approche fréquentielle, le processus d'expérimentation doit permettre de répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions un certain nombre de fois. On obtient alors une fréquence relative qui permet, à mesure qu'elle se stabilise, d'approcher la vraie probabilité avec un niveau de confiance qui augmente en même temps que s'accroît le nombre de répétitions. De ce point de vous, nous considérons que la loi des grands nombres (après une infinité d'essais) indique une stabilisation vers la vraie probabilité associée à l'évènement, et non vers sa « probabilité théorique » (comme c'est habituellement dit). À défaut de pouvoir réaliser une infinité d'essais avec un pince-feuilles, un grand nombre de lancers peut fournir une tendance. On modélise la situation en approchant la vraie probabilité pour chacune des positions. En ce sens, en référence aux travaux de Henry (1999), l'action d'approcher la vraie probabilité pourrait être vue comme l'élaboration d'une modélisation de plus en plus juste et détaillée à l'aide des résultantes soutenues par les approches probabilistes. Cette modélisation est une mathématisation qui s'ajuste progressivement au réel observé au fur et à mesure que l'estimation se précise.

Lorsqu'on est à la recherche de la vraie probabilité dans une approche fréquentielle, on est amené à émettre des conjectures qui se raffinent. Par exemple, pour chaque position du pince-feuilles, la conjecture quant à la vraie probabilité ne sera pas « confirmée » après un nombre d'essais donné, aussi grand soit-il. En effet, on peut approcher la vraie probabilité, mais on ne l'atteindrait en principe (en supposant qu'elle reste toujours fixe) qu'avec un nombre infini d'essais. Il est fort possible que diverses conjectures émergent et se raffinent au fur et à mesure que le nombre d'essais augmente. Les conjectures seraient donc plutôt qualitatives au départ (on peut dire qu'une position est plus probable qu'une autre). Par la suite, alors que le niveau de confiance s'accroît (en même temps que le nombre d'essais), des conjectures quantitatives (par exemple, qu'une position semble deux fois plus probable qu'une autre) seraient posées. Le recours à un échantillon de grande taille pour inférer la vraie probabilité d'une position du pince-feuilles passe donc par la stabilisation d'une fréquence relative, ce qui fait appel à la loi des grands nombres.

La stabilisation de la fréquence relative lorsque le nombre de répétitions augmente peut s'observer à travers le concept de marge d'erreur qui témoigne de la variabilité dans un échantillon. Pour reprendre l'exemple du pince-feuilles, il est possible de calculer une marge d'erreur d'environ 5,66% pour un échantillon composé de 300 essais selon un niveau de confiance de 95% (ou 19 fois sur 20), qui est un niveau de confiance couramment utilisé en analyse statistique inférentielle. Cela signifie que, 19 fois sur 20, les fréquences relatives obtenues ont une marge d'erreur de 5,66% pour chacune des positions du pince-feuilles lancé 300 fois comme dans la figure 1. Il faut donc rappeler que, 1 fois sur 20, on pourrait obtenir une fréquence relative basée sur 300 lancers de pince-feuilles qui serait éloignée de la vraie probabilité par plus de 5,66%. Pour le même niveau de confiance de 95%, si on lance l'objet 1000 fois, la marge d'erreur est d'environ 3,1%. La marge d'erreur diminue à 0,98% pour 10 000 lancers du pince-feuilles et à 0,31% pour 100 000 lancers.

On voit donc que la fréquence relative est en cours de stabilisation au fur et à mesure que le nombre de lancers augmente, étant donné que la marge d'erreur diminue. Il est préférable d'avoir la plus petite marge d'erreur possible pour augmenter le niveau de confiance accordé à l'inférence de la vraie probabilité à partir de la fréquence relative en cours de stabilisation. Dans ce contexte, il convient de se demander si une marge d'erreur de 5,66% avec les résultats de 300 lancers de pince-feuilles est acceptable. Il faut en effet considérer l'effort à déployer pour obtenir les résultats de 1 000, 10 000 ou encore 100 000 lancers de pince-feuilles. Pour produire de nombreux essais et ainsi réduire la marge d'erreur, on peut généralement avoir recours à un simulateur. Toutefois, dans ce cas, cet outil technologique nous permet d'observer la fréquence relative se stabiliser non pas autour de la vraie probabilité, mais plutôt vers la probabilité calculée dans l'approche théorique en fonction de ce qui a été programmé.

Remarques finales : clarification d'une posture épistémologique

À première vue, le modèle que nous proposons peut sembler soutenir l'idée qu'il existe une probabilité qui est vraie en dehors de l'individu qui tente de la découvrir. Cela pourrait laisser présager une posture épistémologique positiviste qui implique qu'il existe « une réalité extérieure à la personne, indépendante et antérieure à son observation et à son expérience [et que] la connaissance ne peut être que le reflet strict de cette réalité » (Jonnaert, 2007, p. 6). Comment concevoir l'idée d'une vraie probabiliteé dans une posture telle que celle du constructivisme radical, qui reconnait l'existence d'une réalité extérieure à l'individu, mais non absolue? Réfléchir à cette question serait un pas intéressant permettant de poursuivre la discussion présentée ici.

Références

Batanero, C. (2014) Probability teaching and learning. Dans Lerman, S. (dir.) *Encyclopedia of Mathematics Education,* pp. 491–496. Dordrecht: Springer.

Batanero, C. et Borovcnik, M. (2016) *Statistics and Probability in High School.* Rotterdam: Sense Publishers.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2009) *Intersection Mathématique. Culture, Société et Technique. 2e cycle du secondaire. 2e année. Manuel de l'élève B.* Montréal: Chenelière Éducation.

Henry, M. (1999) L'introduction des probabilités au lycee: un processus de modélisation comparable à celui de la géometrie. *Repères-IREM* **36,** 15–34.

Jonnaert, P. (2007) *Le Constructivisme comme Fondement des Réformes Contemporaines des Systèmes Éducatifs.* Dakar: Éditions des écoles nouvelles africaines.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W., Horton, N.J., Kazak, S. (2011) Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. *Mathematical Thinking and Learning* **13**(1), 68–86.

Lindley, D.V. (1980) *Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint.* Cambridge R-U: University Press-Cambridge.

Ouellet, G. (1998) *Statistique et Probabilités. Mathématiques au Collégial. Tome III.* Sainte-Foy, QC: Les éditions Le Griffon d'argile.

Pratt, D. (1998) The co-ordination of meanings for randomness. *For the Learning of Mathematics* **18**(3), 2–11.

Renyi, A. (1966) *Calcul des Probabilités.* Paris: Dunod.

Ross, S.M. (2007) *Initiation aux Probabilités.* Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes.

von Mises, R. (1952) *Probabilities, Statistics and Truth.* Londres: William Hodge. (Travail original publié en 1928).

This photo was provided by Martha Koch of the University of Manitoba.