

CAN DIDACTICS SAY HOW TO TEACH? COMPLETE ANSWERS BY BROUSSEAU, ARTIGUE, DUBINSKY, TRIGUEROS, CANTORAL, GRAVEMEIJER AND GODINO

JOSEP GASCÓN, PEDRO NICOLÁS

1. Question and scholars

Question: *To what extent, how, under which conditions, can (or must) didactics set value judgments and normative prescriptions in order to provide criteria about how to organize and manage study processes?*

This question was posed, via electronic message in September 2015, to some researchers working in different approaches in didactics of mathematics: Guy Brousseau representing the *Theory of Didactic Situations* (his main works from 1970 and 1990 can be found in Brousseau, 1997), Michèle Artigue (a good reference to learn about Artigue's work and influence in didactics is Hodgson, Kuzniak & Lagrange, 2016), Ed Dubinsky and María Trigueros representing *APOS* theory (to have an overview of this theory the reader is invited to consult Dubinsky & McDonald, 2001 and Arnon *et al.*, 2014), Ricardo Cantoral representing the *Socioepistemology Theory of Mathematics Education* (Cantoral, 2013; Cantoral & Farfán, 2003 and Cantoral, Montiel & Reyes- Gasperini, 2015), Koeno Gravemeijer representing *Realistic Mathematics Education* (Gravemeijer, 2014 and Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer & van Stiphout, 2016) and Juan D. Godino representing the *Onto-semiotic Approach* (Godino, Font, Wilhelmi & de Castro, 2009). The next sections will be devoted to the answers. Of course, we have the permission of our colleagues for the diffusion of their answers here.

2. Answer in French by Guy Brousseau: Theory of Didactic Situations

- a) Il me semble bien que le terme « norme » possède au moins trois acceptions principales.
1. La norme comme **constat** et **description** de l'état des caractères ordinaire et/ou relativement stables, d'un système.
 2. La norme comme **intention commune**, dans un projet individuel ou collectif
 3. La « norme » comme **obligation** de résultats assortie de sanctions en cas de violation ou d'échec ; contractuelle elle est légitime, imposée alors qu'il n'existe pas de protocole connu pour l'obtenir, elle est illégitime et infâme, une sorte d'esclavage.

L'ambiguïté qui en résulte nécessite d'indispensables négociations autour du projet social d'éducation,

mais en même temps aussi, elle les pervertit car personne ne sait vraiment comment on apprend ni comment on découvre.

- b) Dans le schéma classique, la didactique (issue de Comenius) est un art dont les règles reposent (1) sur des textes du savoir à enseigner, issus de la communauté savante, (2) sur des conventions et des pratiques générales connues de la population et (3) sur des coutumes, sur une méthode et sur un art fait d'actions *opportunistes*, empiriquement révisables si elles sont *inadéquates* et systématiquement variées par l'enseignant pour ne pas concurrencer la consistance du savoir à apprendre par des signaux formels qui donne la réponse en évitant de l'envisager. La garantie que cette éducation respecterait un contrat social équitable et honorable incombait le plus souvent au pouvoir politique qui répondait seulement à une exigence de moyens.

Aujourd'hui les gouvernements démocratiques éprouvent de grandes difficultés à satisfaire leurs obligations de faire de l'éducation la base de la cohésion des populations de leur territoire. Les contradictions et les conflits d'intérêts résultant de cette évolution sont attisés par l'importance financière et politique du marché de l'éducation et de l'enfance.

- c) La technologie informatique accélère l'effet de ces évolutions rapides, concomitantes et chaotiques dans divers secteurs classiques des sciences humaines. Ce sont ceux : (1) des connaissances à enseigner, (2) des moyens de leur diffusion, (3) des attentes divergentes de diverses composantes de la société, (4) des divergences et de l'incomplétude entre les références scientifiques classiques de l'enseignement.

Par leur nature même ces Sciences soutiennent des approches qui ignorent la singularité de la connaissance visée. Elles ne peuvent qu'ignorer ou négliger les conditions particulières effectives de son apparition et de son appropriation. L'enseignement des connaissances par celui des textes qui les expriment, à l'aide d'autres textes... est un processus qui inverse l'ordre de la genèse des con-

- naissances ou l'expression correcte des savoirs conclut le processus et non pas le commence.
- d) Les progrès scientifiques dans diverses sciences ont attiré l'attention sur toutes sortes de « faiblesses » des « résultats » de ce schéma classique. Les contestations de l'enseignement se sont multipliées, elles se sont exacerbées et elles ont été bientôt assorties d'*exigences de résultats*, manifestement impossibles à satisfaire et à justifier avec les connaissances actuelles dans ce domaine. Mais cette poussée a fait surgir de multiples *propositions* de diverses origines qui ont présenté des alternatives en fait impossibles à arbitrer, mais qui ont nourri la contestation, permis de discréditer les modalités scolaires classiques et de détourner vers des entreprises commerciales ou vers d'autres activités les moyens nécessaires. La privatisation de la collation des grades et l'usage scandaleux des évaluations auxquelles aucune science ne peut associer des décisions justifiées achève de livrer l'éducation à la discrétion de toutes sortes d'entreprises sans liens avec l'intérêt public d'une démocratie.
 - e) Seule l'observation des phénomènes singuliers qui président à l'acquisition de connaissances précises dans des conditions qui leur sont spécifiques peut permettre de comprendre, d'expliquer et peut être d'améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Seule une connaissance scientifique de ces phénomènes peut permettre d'espérer
 - f) Mettre des normes sur des phénomènes qu'on ne comprend pas et qu'on ne commande pas pour ensuite pouvoir accuser les acteurs du système de les avoir violées est un processus de mise en esclavage vieux comme la civilisation. Il semble absurde aujourd'hui, sauf si on comprend qu'il s'agit d'une étape essentielle dans la soumission progressive des populations à des intérêts privés incoercibles.
 - g) Il faudrait aujourd'hui avancer résolument dans la recherche fondamentale mais rester discrets sur ses objets d'études jusqu'à ce que des applications de cette Science puissent fournir aux enseignants des protocoles calibrés qui donneront une sécurité raisonnable aux élèves et aux enseignants qui les respecteront, sans pour autant relâcher leur vigilance personnelle, toujours indispensable.

La liberté pédagogique est indispensable mais, à l'intérieur de limites qui assurent le respect du contrat avec l'homogénéité (pas l'unicité) et la diversité nécessaires.

3. Answer in English by Guy Brousseau: The-ory of Didactic Situations [1]

- a) I believe the term "norm" has at least three different meanings:
 1. The norm regarded as a statement and description of the state of ordinary and/or relatively stable characteristics of a system

2. The norm as a common intention, in an individual or collective project.
 3. The norm as an **obligation**, accompanied by fines in case of failure to comply with the norm. If this norm comes from a contract it would be legitimate. If it were an imposition it would be unlawful and loathsome, a sort of slavery. The resulting ambiguity requires indispensable negotiations concerning the social project of education. But also this ambiguity corrupts the negotiations, since nobody really knows how we learn or how we make discoveries.
- b) According to the classic scheme, the didactics (which has its origins in Comenius) is an art in which the rules are based on (1) the texts of the knowledge to be taught, coming from the wise community, (2) conventions and general practices known by the population and (3) habits, a method and an art made of *opportunist* actions, empirically revisable if they are *inappropriate* and systematically changed by the teacher for not to compete with the consistency of the knowledge to be learned through formal signs which give the answer [to the students] preventing them [the students] to take this knowledge into account. To guarantee that this education respects a fair and honorable social contract would concern, most of the times, the politic power, which would only react to a demand of means.

Nowadays the democratic governments have great difficulties to carry out their duty of using education as the basis for the cohesion of the population in their territory. Contradictions and interest conflicts resulting from this evolution are stirred up by the political and economical importance of the education and childhood markets.
 - c) Computer technology speeds up the effect of these fast evolutions, concomitant and chaotic in the various classical sectors of human sciences, which are the following: (1) the knowledge to be taught, (2) the means for its spreading, (3) the diverging prospects of several sectors of society, (4) the differences and lack of completeness in the classical scientific references in teaching.

Due to its own nature Sciences hold approaches which ignore the singularity of the corresponding knowledge. They can do nothing but ignore the particular conditions of its appearance and learning. The teaching of knowledge via texts containing them with the help of other texts,... is a process which reverses the order of the genesis of knowledge in which the correct expression of the knowledge appears as the conclusion of the process and not as the beginning.

- d) Scientific progress in many sciences has drawn attention to all kind of 'weaknesses' of the 'outcomes' of this classical scheme. Disputes about teaching have increased, and they have been exacerbated and have quickly incorporated *demands for results* manifestly impossible to obtain with the present knowledge in this domain. But the pres-

sure of these demands has motivated the appearance of many proposals offering unfeasible alternatives. In turn, these alternatives have fueled the disputes, have allowed the discredit of the classical school modalities and to divert of the necessary means towards business companies or some different activities. Moreover, privatization of graduations and the scandalous use of evaluations, to which no science can attach any justified decision, end up surrendering education to the will of all kind of enterprises with no link to the public interest of a democracy.

- e) Only the observation of the singular phenomena that govern the acquisition of knowledge in the conditions specific to them can lead to an understanding, an explanation, and perhaps an improvement of the learning and teaching of mathematics.
- f) To impose norms concerning phenomena (which we don't understand and we don't control) in order to be able to accuse the actors of the system of violation of these norms, would entail a process of enslavement as old as civilization itself. It seems nonsense nowadays, unless it is regarded as an essential stage in the progressive subjugation of the population to the irrepressible private interests.
- g) Fundamental research should be advanced resolutely, but it should remain circumspect about its results until applications of this research can provide teachers with appropriate procedures that will provide reasonable security for pupils and teachers who respect them, without relinquishing their personal awareness, which will always be indispensable.

Pedagogical freedom is always indispensable, but inside some borders ensuring the respect to the contract concerning necessary homogeneity (not uniqueness) and diversity.

4. Answer in French by Michèle Artigue

La didactique qui s'est constituée, comme champ de recherche, dans la seconde moitié du XXe siècle, ne s'est pas constituée avec des ambitions normatives, et cela a été le cas notamment en France. Marquée par les désillusions engendrées par la réforme dite des mathématiques modernes qui y avait été particulièrement radicale, la recherche s'y est en effet constituée avec la conviction que la priorité devait être donnée à la compréhension du fonctionnement des systèmes didactiques, à l'élucidation des processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques qui, seules, seraient à même de fonder une action raisonnée. C'était, me semble-t-il, une position partagée au sein de notre communauté émergente, et une position que défendait et a continué à défendre Guy Brousseau pour lequel je pense, la réponse à la question posée serait un « Non » catégorique.

Ceci ne veut pas dire que la didactique y était vue comme une science purement fondamentale. Il était clair qu'elle devait également se soucier de la forme qu'elle pouvait prendre dans sa dimension de science appliquée, se soucier du développement de ses applications, mais avec la prudence requise d'une science

appliquée. On trouverait sans difficulté, mais je n'ai pas le temps de le faire, de nombreux textes où s'exprime cette position. Je citerai simplement, puisqu'il s'agit d'un texte qui sera discuté à un congrès de la TAD, un extrait de la note rédigée par Yves Chevallard pour préparer le travail sur l'ingénierie didactique à la deuxième école d'été de didactique des mathématiques, en 1982 :

« Nous sommes d'accord—quelques-uns d'entre nous au moins—sur cet enjeu important d'Orléans : manifester positivement, entre nous et auprès des professeurs qui suivront cette Ecole d'Été, l'ambition et la capacité des didacticiens à *avancer des propositions face aux difficultés qui affectent le système d'enseignement*. C'est ainsi que toute la partie « ingénierie » de l'Ecole apparaît a priori comme le lieu privilégié où une bataille se perdra ou se gagnera, dans la guerre, à peine amorcée, visant à nous faire reconnaître comme d'incontournables interlocuteurs des acteurs (professeurs, mais aussi élèves ; etc.), des gestionnaires, des décideurs du système d'enseignement. Poser le problème de l'ingénierie didactique, c'est poser, en le rapportant au développement actuel et à venir de la didactique des mathématiques, le problème de l'action et des moyens de l'action, sur le système d'enseignement. » (Note 4, page 1)

Ceci étant dit, comme champ de recherche, la didactique s'est effectivement développée, au sein de notre communauté notamment, comme une didactique qui se donnait comme priorité d'analyser, de comprendre la complexité des processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et plus largement celle des processus de diffusion intentionnelle des mathématiques dans la société, au sein de toutes sortes d'institutions. Et ses constructions conceptuelles ont principalement servi ce but. L'ingénierie didactique elle-même, en dépit de la dualité initialement pointée, a été principalement conceptualisée et utilisée dans sa dimension phénoménoteknique, comme je le soulignais dans le cours donné à l'école d'été de 1989 où c'était pour la seconde fois l'un des thèmes d'étude. Si les ingénieries de recherche ont diffusé hors du champ de la recherche, cela n'a pas été le fait d'un processus de diffusion contrôlé avec le travail théorique et méthodologique, les moyens qu'un tel processus requiert, comme le montre le champ de la « Design research », au-delà de la seule éducation mathématique, ou dans notre champ des travaux comme ceux de Paul Cobb par exemple. Et les effets dénaturants de cette diffusion non contrôlée ont sans aucun doute renforcé les doutes de nombreux chercheurs quant au potentiel d'action de la recherche didactique.

Ceci étant, les didacticiens, dans leur très grande majorité, ne sont pas simplement des chercheurs ; ils sont aussi des enseignants de mathématiques, des formateurs d'enseignants, qu'il s'agisse de formation initiale ou de formation continue. Ils participent pour certains d'entre eux aux décisions curriculaires, à l'écriture de manuels. Leur action d'enseignant, de formateur, de noosphérien, se nourrit de leurs visions et de leurs connaissances didactiques ; la didactique nourrit les processus transpositifs dont ils sont les

agents, à différents niveaux, tant de façon consciente qu'inconsciente. La recherche didactique, qu'elle l'assume ou non, est donc aussi « appliquée ». Les revues d'interface que sont *Repères IREM*, *Petit X* et *Grand N* le montrent bien, tout comme de nombreuses publications IREM, des documents d'accompagnement des programmes et les programmes eux-mêmes ; la formation des enseignants le reflète, de façon directe dans les formations labélisées didactiques mais aussi indirecte. Mais cette application de la didactique, artisanale dans la plupart des cas, diverse pour ne pas dire hétéroclite, ne relève en rien d'une application normée, même lorsqu'elle émet des jugements de valeur et a une visée transformative affichée, ce dont elle ne se prive pas.

Il y a certainement à progresser vers une prise en charge plus professionnelle des rapports entre recherche et action didactique ; faut-il pour autant donner à la didactique une fonction normative ? Personnellement j'y suis très réticente, pour de nombreuses raisons qui tiennent à la fois à l'état de la recherche didactique et à la nature même de ce champ d'étude.

Certes la recherche didactique a accumulé internationalement des connaissances, mis en évidence des régularités, exprimé des phénomènes, élaboré et « validé » des stratégies d'enseignement, utiles pour fonder une action didactique raisonnée. Mais d'une part, cette recherche, dans la plupart des domaines, est encore trop fragmentaire pour normer l'action didactique. Par ailleurs, le champ de validité des régularités identifiées—hormis en ce qui concerne des phénomènes trop généraux pour fonder une action spécifique—comme des stratégies « validées », reste largement inconnu. Or les études et comparaisons internationales qui se sont multipliées ces deux dernières décennies, de mieux en mieux outillées conceptuellement par des approches socio-culturelles ou anthropologiques, ont bien montré la dépendance de ce champ, y compris pour ce qui concerne les praxéologies de recherche, des contextes et des cultures. Cette dépendance montre bien notamment à quel point, même si des régularités apparaissent relativement transversales, les façons efficaces et écologiquement viables de les prendre en charge dans l'action didactique, ne peuvent être que locales, prenant en compte la complexité des systèmes locaux de conditions et contraintes, pour reprendre la terminologie de la TAD. On ne peut penser l'organisation de l'action didactique comme on pense celle du développement d'un médicament, en dépit des analogies souvent développées avec la sphère médicale ; et il y a beaucoup à craindre de la migration en éducation, souhaitée dans certaines sphères, de l'« évidence-based medicine ». Mes responsabilités au sein de l'ICMI m'ont particulièrement sensibilisée à ces questions, et aussi à la façon dont les cultures didactiquement dominantes, et la culture didactique française en est une, tendent à oublier la façon dont leurs constructions et connaissances ont été façonnées par leur propre contexte et culture, et à questionner insuffisamment leurs champs de validité.

Mais mes réticences sont aussi d'une autre nature, car à travers l'idée d'une didactique normative, se joue aussi la question des rapports entre acteurs du champ didactique. Une didactique source de normes qui porteraient sur quoi ? Des normes qui s'imposeraient à qui ? Qui seraient validées

par qui ? Qui introduiraient quels assujettissements, quelles relations de subordination ? Dans un système éducatif comme le nôtre, si dominé par les hiérarchies de toutes sortes, si « top-down » dans son fonctionnement, nous ne progressons que lentement vers une vision plus collaborative du travail, des relations entre acteurs et communautés, un partage plus efficace des responsabilités. Cela me semble un enjeu essentiel et je ne suis pas du tout convaincue que la prétention de la didactique à une dimension normative pourrait y aider.

Ces réticences, et tous ceux qui me connaissent n'en douteront pas, ne signifient pas que je me satisfasse des rapports actuels entre recherche et action didactiques. Comme je l'ai souvent exprimé et exprimé dans mes actes, le didacticien ne saurait se désintéresser des problèmes de la cité. La recherche doit servir à la fois la compréhension et l'action. Pour moi, ceci suppose un engagement de la communauté tout entière, non seulement d'individus isolés, dans des projets d'envergure engageant une diversité d'acteurs sur la durée. Ceci suppose que les formes collectives de travail et les productions associées soient valorisées par la communauté elle-même au même titre que ce qui est valorisé voire survalorisé aujourd'hui. Il y a beaucoup à faire !

5. Summary in English of the answer by Michèle Artigue [2]

- “Didactics, when it was set up as a field of research, was not constituted with normative ambitions, especially in France. [...] Research was built on the conviction that priority should be given to understanding the functioning of didactic systems, to clarify the processes of teaching and learning of mathematics which alone could be the basis of reasoned action.”
- The aspect of applied science in didactics can be linked to didactic engineering. However didactic engineering is not really a tool to act on didactic systems but rather a research methodology to study phenomena.
- Actually, the spreading of devices attached to didactic engineering out of the field of research, and the distorted effects of this spreading, have shown the limitations of these works of didactic engineering to organize the action on didactic systems.
- “However, the vast majority of didacticians are not just researchers; They are also teachers of mathematics, and/or teacher trainers [...] Their work [...] is nourished by their visions and didactic knowledge [...] This application of didactic [...] is in no way a normative application, even when it makes value judgments and has a transformative aim.”
- “There is certainly a need to move towards a more professional approach to the relationship between research and didactic action; does this mean that didactics should have a normative function? Personally, I am very reticent to say so, for many reasons that are due both to the state of didactic research and to the very nature of this field of

study.” Presently the results from research in didactics are still very partial and dispersed, and do not allow us to infer normative statements. And the cultural and contextual dependence of this field of study makes it difficult to know the scope of the results.

- “But my reservations are also of a different nature, because in the idea of normative didactics, the question of the relations between the actors in the field arises. A didactic source of norms would cover what? Which norms would be imposed? Who would be judged by whom? Who would introduce what obligations, what relations of subordination? In an educational system like ours, so dominated by hierarchies of all kinds, so top-down in its functioning, we are slowly moving towards a more collaborative vision of work, of relationships between actors and communities, of responsibilities. This seems to me to be an essential issue and I am not at all convinced that claiming a normative dimension for didactics could help.”
- This reluctance does not mean that I am satisfied with the relationships between research and action in didactics. As I have shown many times, in word and deed, the researcher in didactics cannot be indolent with problems in the city. Research in didactics must be useful both to understand and to act.

6. Answer by Ed Dubinsky: APOS Theory

Using a theory of learning is an essential ingredient for both research in mathematics education and in helping students learn mathematics.

I will explain my view by listing the kinds of contributions a theory of learning can make and then discuss the extent to which the theory with which I am most familiar, APOS Theory, makes these contributions.

In 2001, McDonald and I published a paper stating that a theory can: support prediction; have explanatory power; be applicable to a broad range of phenomena; help organize one’s thinking about complex, interrelated phenomena; serve as a tool for analyzing data; and provide a language for communication of ideas about learning that go beyond superficial descriptions.

APOS Theory describes learning mathematics in terms of certain mental constructions. The theory provides a pedagogical strategy, the Ace Teaching Cycle, for applying.

An APOS analysis of the cognitive development of a mathematical concept describes the mental constructions and their relations that will lead an individual to develop an understanding of the concept. Thus, one can predict that if a learner has made (not made) these constructions then he or she is likely (unlikely) to learn the concept. Having (not having) the required mental constructions provides an explanation of why an individual is (not) successful in learning a concept.

A multitude of published research papers attests to wide applicability of APOS Theory. Thinking in terms of the actions, processes and objects of APOS Theory is, and has

been used as, an effective way of thinking about a mathematical concept. A method has been developed (and widely applied) for using APOS Theory to analyze data. APOS Theory has led to increased usage, in the language of mathematical discourse, of the key ideas of APOS Theory.

The field of mathematics education research would benefit from a broad discussion of criteria such as the above six, add and/or delete criteria, and use them to evaluate theories of learning mathematics.

7. Answer in Spanish by María Trigueros: APOS Theory

1. La Teoría APOS fue creada con el fin último de mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Desde esa perspectiva, la investigación sobre el aprendizaje de los alumnos está en servicio del diseño de prácticas de enseñanza, que a su vez deben ser analizadas en términos del aprendizaje de los alumnos. En APOS la investigación y la didáctica van de la mano: La investigación realizada a través de los años ha mostrado ejemplos exitosos de formas de guiar el aprendizaje de los alumnos. El análisis de las propuestas de enseñanza sugiere además nuevos problemas de investigación. A partir de la teoría es posible emitir juicios valorativos de las experiencias de investigación que se realizan con ellas. De los resultados de didácticas puestas en juego es posible establecer algunos criterios valorativos que guíen la organización y gestión del proceso de estudio en casos particulares. Sin embargo, en términos generales, me parece que no es el papel de la didáctica proponer criterios valorativos, y menos normativos, sobre la organización y gestión del proceso de estudio.
2. La difusión de los resultados de investigación a través de revistas no necesariamente de investigación, en forma de síntesis de resultados relevantes, puede tener un impacto en la elaboración de criterios para organizar los procesos de estudio.
3. Los resultados de la investigación constituyen una fuente importante de conocimientos que pueden ser empleados para valorar y comparar distintas maneras de organizar los procesos de estudio que han resultado valiosas en términos del aprendizaje de los alumnos y también para gestionar de manera efectiva el proceso de estudio en el aula.

Los resultados de un análisis general de dicha investigación pueden proporcionar criterios valorativos para la organización y gestión de los mismos. Pero, no es el papel de la didáctica, en general, normar su organización y gestión.

8. Answer by María Trigueros: APOS Theory (3)

1. APOS theory was created with the ultimate goal of improving learning of mathematics. From this perspective, research concerning student’s learning serves the design of teaching practices which, in turn, must be analyzed in terms of student’s learn-

ing. In APOS research and teaching go hand in hand: research developed along years has shown successful examples of ways to guide student's learning. Moreover, the analysis of teaching proposals suggests new research problems. From theory it is possible to deliver value judgments concerning research experiences made with those teaching proposals. From the results of teaching proposals put into practice it is possible to set some criteria to guide the organization and management of educational process in some particular cases. However, in general terms, I think didactics should not propose value criteria, and still less normative ones, about the organization and management of educational processes.

2. Diffusion of research results in journals not necessarily devoted to research, in the format of summaries of relevant results, may have an impact on the establishment of criteria for organizing educational processes.
3. Research results are an important source of knowledge which can be used to value and compare different ways of organizing the study processes which have been valuable concerning student's learning and also to manage effectively the study process in the classroom.

The results of a general analysis of such a research can provide value criteria to organize and manage study processes. But, in general, it is not the role of didactics to create rules for this organization and management.

9. Answer in Spanish by Ricardo Cantoral: Socioepistemology Theory of Mathematics Education (STME)

La Socioepistemología de la Matemática Educativa (TSME) es un marco teórico para la investigación y el desarrollo educativo. Se propone la búsqueda de estrategias para *democratizar el aprendizaje* de las Matemáticas y surge del "cruce de caminos" entre las humanidades, las ciencias sociales y las matemáticas en su intento por explicar las relaciones entre mente, saber y cultura con apoyo en la noción de *práctica social*.

La TSME modela procesos de *construcción social del conocimiento matemático* y de su difusión institucional, la noción de *práctica social* resulta entonces fundamental para explicar la construcción del conocimiento basado en *prácticas*; se trata en consecuencia de un enfoque teórico de corte pragmático que asume que las matemáticas, así como lo hace el juego reglado, forman parte de la cultura y se guían, por tanto, por normativas específicas de carácter social y cultural. En este sentido, hemos mostrado empíricamente, luego de tres décadas de trabajo académico, que dichas prácticas (denominadas *prácticas socialmente compartidas*) están normadas por *prácticas sociales*.

La Socioepistemología por otra parte, precisa de una metodología para un re(Re)diseño del *discurso Matemático Escolar* que parta de la *descentración del objeto* (como condición para la emergencia de las prácticas) y por otro,

de una *problematización del saber* (matemático y matemático escolar). En nuestra opinión, esto ocurre en virtud de que las *prácticas sociales* se encuentran en la base de todo conocimiento humano en forma de sabiduría (saber popular, saber técnico y saber científico) y norman los procesos del aprendizaje humano (Cantoral 2013).

Para la TSME, la Didáctica de las Matemáticas, aun siendo una ciencia fundamental, no se constituye, propiamente, como ciencia normativa. Pues su carácter experimental con fundamentos teóricos, le exige del abandono de los absolutismos. Sus pretensiones de legitimidad, en nuestra opinión, deben buscarse más bien en la constitución plena, como un verdadero campo de saber de referencia para el profesorado en matemáticas de los diferentes niveles educativos así como también, de los demás participantes de los procesos didácticos. Esto si constituirá desde nuestro punto de vista un fin común de nuestras teorías.

Debemos todavía aprender a observar y a analizar procesos de aprendizaje en matemáticas y sus vínculos con las ciencias y la cultura en un sentido amplio, habremos de entender aún mejor los procesos de empoderamiento docente y de la construcción social del conocimiento matemático, nos faltan estudios conjuntamente con profesores sobre la problematización de la matemática escolar y por tanto, nuestras prescripciones y diagnosis habrían de limitarse a sistemas locales de acción.

Las teorías clasificatorias generalistas, muy en boga actualmente, no ayudan en la búsqueda de una estabilidad para el funcionamiento del sistema didáctico, seguimos por tanto apostando al desarrollo de teorías que se comuniquen y dialoguen para entender localmente el funcionamiento del sistema didáctico. La TSME sigue avanzando en esa ruta.

10. Answer in English by Ricardo Cantoral: Socioepistemology of Mathematics Education (STME)[4]

The Socioepistemology of Mathematics Education (STME) is a theoretical framework for research and educational development. This theory looks for strategies in order to *democratize learning* of Mathematics and appears in the crossroads of Humanities, Social Sciences and Mathematics in its attempt to explain the links between mind, knowledge and culture, with the support of the notion of *social practice*.

STME models processes of *social construction of mathematical knowledge* and its *institutional spreading*. The notion of *social practice* turns out to be essential to explain the construction of knowledge based on *practices*. It is, thus, a theoretical approach with a pragmatic slant, which assumes that Mathematics, as well as regulated games, is part of the culture and is hence led by specific norms of social and cultural character. In this sense, we have proved empirically, after three decades of academic work, that these practices (called *socially shared practices*) are guided by social practices.

Socioepistemology needs a methodology for a re(Re)design of the *School Mathematical discourse* starting with a *decentralization of the object* (as a condition for the appearance of practices) and a *problematization of* (mathematical and school mathematical) *knowledge*. In our opinion, this hap-

pens by virtue of the fact that social practices are at the base of every human knowledge under the form of wisdom, folklore, technical knowledge and scientific knowledge, and guide the processes of human learning (Cantoral 2013).

According to the Socioepistemology Theory of Mathematics Education (STME), didactics of mathematics, even being a fundamental science, is not, properly, a normative science. Indeed, its experimental character, with theoretical foundations, forces the abandonment of absolutism. In our opinion, the claim of legitimacy should be derived from the full constitution of didactics of mathematics as a reference field of knowledge for the teachers, in the different levels of education, and also for the other participants in didactic processes. This would be, from our point of view, an ultimate common aim of our theories.

We still have to learn how to observe and analyze learning processes in mathematics, and the links with sciences and culture in a broad sense. We still have to get a better understanding of teacher empowerment processes and the social construction of mathematical knowledge. There is a lack of studies, in collaboration with teachers, about the questioning of school mathematics and so our prescriptions and diagnosis should be limited to local systems of action.

Generalist classifying theories, which are lately in vogue, do not help to the search for the stability of the working of the didactic system. Hence, we keep betting on the development of theories which communicate and talk in order to understand, locally, the working of the didactic system. The STME keeps moving in this direction.

11. Answer by Koeno Gravemeijer: Realistic Mathematics Education (RME)

The starting points of didactical theories are often defended by arguments of the type, “This is the best way, to learn mathematics”. Underneath these arguments, however, lay normative values and judgments, which I believe are more important considerations for most math educators. With which I do not mean to say that arguments about, or empirical proofs of, effectiveness are irrelevant. But, they cannot be seen separate from ideas about what goals are important and how mathematics should be taught.

In RME the central principle is that students should experience *‘mathematics as a human activity’*, with *mathematizing* (both of subject matter from reality and mathematical matter) as key activity. In line with this principle students should be supported in learning mathematics through a process of *guided reinvention*, in which students construct mathematics in a self-reliant manner. An additional principle is that the mathematics learned should be *useful* for the students. This is to be achieved by organizing mathematics education in such a manner that students experience mathematics as part of their (*expanding*) *experiential reality*—following Freudenthal’s credo of “Mathematics starting and staying in reality.” This takes us back to the mathematical activity of mathematizing, which should allow for the latter.

The above criteria are based on thorough analyses and well-considered reasoning, which can be found in the literature on RME. Yet they are also value-laden and normative. I would argue, however, that the latter also holds for alternative principles, such as the principle that the logical structure

of mathematics has to be taken as the basis for structuring mathematics education, or the principle that one should learn pure mathematics first and learn to apply it later.

12. Answer in Spanish by Juan D. Godino: The Onto-semiotic Approach (OSA)

En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) la Didáctica de la Matemática se concibe como una Tecno-Ciencia, esto es, la naturaleza del conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico—tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, semiótica y epistemológica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo), y por otra parte se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos de la manera más efectiva posible (componente tecnológico—prescriptivo).

La forma que pueden adoptar los conocimientos didácticos es diversa; pueden ser clarificaciones sobre la naturaleza de la práctica matemática y de los sistemas conceptuales mediante la cual se organiza, principios didácticos de actuación preferente, o también recursos instruccionales experimentados y contrastados. En el marco del EOS tanto los principios como los recursos instruccionales no se consideran como reglas o leyes generales inferidas de manera positivista sino criterios de idoneidad sobre los cuales se ha generado un cierto consenso en la comunidad de educación matemática. Tales criterios tienen que ser aplicados localmente, por lo que se requiere realizar adaptaciones e interpretaciones por parte del “sistema docente”, y se refieren a cada una de las dimensiones implicadas: epistémica- ecológica, cognitiva—afectiva, interaccional—mediacional.

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de calidad de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Dicho criterio general de idoneidad se ha particularizado para cada faceta teniendo en cuenta algunos supuestos y herramientas del EOS y se ha elaborado un sistema de criterios empíricos de idoneidad para las diversas componentes.

13. Answer in English by Juan D. Godino: The Onto-semiotic Approach (OSA) [5]

In the context of the Onto-semiotic Approach (OSA) of the mathematical knowledge and education, didactics of mathematics is considered to be a techno-science, that is to say, the nature of the knowledge to be constructed has both a scientific and technological character. This means that, on one hand, one considers theoretical problems concerning ontological, semiotic and epistemological clarification of mathematical knowledge, to the extent that these problems

are related to teaching and learning processes (scientific, descriptive and explanatory component). On the other hand, one takes part in those processes to increase their effectiveness (technological-prescriptive component).

Didactic knowledge can take different forms. They can be: clarifications about the nature of mathematical practice and the conceptual systems by which this practice is organized, didactic principles of preferred actions, and also contrasted and experimented teaching resources. Teaching principles and resources are not regarded by the OSA as general rules or laws inferred in a positivist way, but suitability criteria about which there is a certain consensus in the Mathematics Education community. Those criteria, which refer to each of the entailed dimensions (epistemic—ecological, cognitive—affektive, interactional—mediational), are to be used locally, and so the ‘teaching system’ has to make adjustments and interpretations.

In the theoretical system of the OSA we have included the notion of didactic suitability, which refers to a systemic criteria of quality of a process of teaching mathematics. It is defined as the degree in which this process (or a part of it) have certain features which allow to define this process as suitable (optimal or adequate) to get the adaptation between the personal meanings obtained by the students (learning) and the intended institutional meanings (teaching), taking into account the available circumstances and resources (environment).

This didactic suitability criterion has been specified for each facet, taking into account some suppositions and tools of the OSA, and an empirical system of suitability criteria for the different components has been made.

Notes

[1] The content of § 3 is an authorized translation, made by the authors, of the answer presented in § 2.

[2] The content of § 5 is an authorized summary, made by the authors, of the

answer presented in § 4. Quoted sections are direct translations.

[3] The content of § 8 is a translation from Spanish to English of the answer by María Trigueros presented in § 7.

[4] The content of § 10 is a translation from Spanish to English of the answer by Ricardo Cantoral presented in § 9.

[5] The content of § 12 is a translation from Spanish to English of the answer by Juan D. Godino presented in § 11.

References

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*, Chapter 5. New York: Springer-Verlag.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer Academic Publishers.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, **53**(3), 255–270.
- Cantoral, R., Montiel, G., Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **18**(1), 5–17.
- Dubinsky, E. and McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research. In D. Holton (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, pp. 273–280. Kluwer Academic Publishers.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico, *Enseñanza de las ciencias*, **27**(1), 59–76.
- Gravemeijer, K. P. (2014). Transforming mathematics education: The role of textbooks and teachers. In Y. Li, E. A. Silver and S. Li (Eds.) *Transforming Mathematics Instruction*, pages 153–172. Springer International Publishing.
- Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J. M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of Mathematics Education Reform in The Netherlands: A Paradigm Case? *Mathematical Thinking and Learning*, **18**(1), 25–44.
- Hodgson, B. R, Kuzniak, A., Lagrange, J.-B. (Eds.) (2016) *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue*. Springer International Publishing.