Un outil d'analyse cognitive de l'apprentissage de concepts complexes intégrés du calcul infinitésimal*

MARIO LAVOIE, ERNESTINE LEPAGE, YVAN ROUX

Introduction

Diverses études ont déjà abordé le problème de l'apprentissage du calcul infinitésimal. Signalons particulièrement, celles de Shelton [1965] et de Marchegiani [1977]. Shelton, pour sa part, compare les résultats des apprentissages découlant de deux méthodes d'enseignement du concept de limite: 1) une méthode intuitive ou "concrete inductive" et 2) une méthode déductive appelée "abstract deductive". En 1977, Marchegiani détermine lui aussi les effets de deux méthodes (*proof treatment* et *non proof treatment*) concernant cette fois la performance des étudiants et leur habilité à utiliser la pensée critique en fonction de certaines approches d'apprentissage du calcul différentiel.

Ces études et d'autres du même type [Chaney, Jackson, Kongkitpsial, Lackner, McGannon, Pavlick, Tawfik] ont la particularité de mesurer la performance des apprenants ou le développement d'habilités chez ceux-ci, en fonction de certaines approches de l'apprentissage du calcul infinitésimal.

La présente étude s'attarde à l'apprentissage du calcul infinitésimal et plus particulièrement à celui de la limite. Son but n'est pas de mesurer l'efficacité d'une méthode ou d'un modèle, mais de proposer un outil d'analyse susceptible de favoriser l'apprentissage du concept et des propriétés de la limite chez des étudiants de niveau collégial.

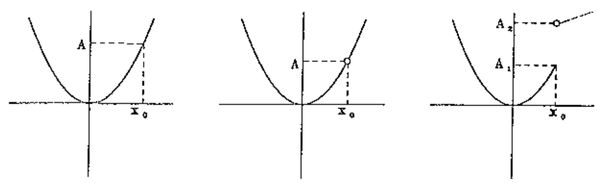
Dans cet article, nous exposerons d'abord la problématique qui nous a incités à développer un modèle d'apprentissage du calcul. Nous décrivons ensuite un modèle articulé à partir de deux études psychologiques. Par la suite nous l'illustrerons à l'aide d'exemples se rapportant à l'apprentissage du concept et des propriétés de la limite. Nous terminerons cet article en montrant le rôle que peut jouer le modèle dans le contexte de la formation d'un concept complexe intégré.

1. La problématique

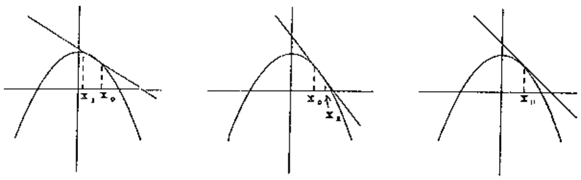
Dans le context de l'apprentissage du calcul infinitésimal au niveau collégial, il est hors de question de ne développer uniquement que de façon hypothético-déductive une théorie du calcul infinitésimal, privant ainsi l'apprenant d'un facteur important d'intégration de cette théorie. On privilégie, en général, des approches intuitives à ce niveau.

A titre d'exemple, une méthode servant à faire appréhender et former les concepts de limite, de dérivée et d'intégrale, utilise généralement des images de types dynamiques ou cinétiques. Plus spécifiquement on considère les images suivantes.

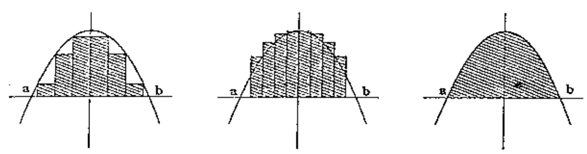
POUR LA LIMITE



POUR LA DERIVEE



POUR L'INTEGRALE



* Recherche subventionée par le fonds FCAC: EQ1841

* Toutes les figures du présent article ont été tracées par un traceur de courbe 7221B asservi par un mini-ordinateur HP-3000. Les auteurs désirent remercier monsieur Yves Carbonneau pour son excellent travail de production de logiciel.

Ces images, on les qualifie de cinétiques ou dynamiques, parce qu'une fois intériorisées, l'esprit opère sur celles-ci pour les modifier et les transformer On verra plus loin que ces opérations relèvent plutôt du domaine de la représentation figurale.

Cependant, lorsqu'on aborde l'étude des principales propriétés de la limite, de la dérivée ou de l'intégrale, les images cinétiques ou dynamiques utilisées lors de l'introduction de ces concepts sont, dans beaucoup de cas, rapidement mis de côté Tous se passe comme si on avait tourné quelques pages du grand volume dépositaire du corpus de la théorie et que l'on était dans un nouveau chapitre La tendance, dans ce contexte, est de focaliser sur les aspects algébriques ou calculatoires des propriétés de la limite, de la dérivée ou de l'intégrale. Cette approche des propriétés de ces concepts relève plutôt du domaine de la représentation symbolique que de celui de la représentation figurale. Cette façon de traiter les thèmes de la limite, de la dérivée ou de l'intégrale au niveau collégial crée une discontiguité dans le processus d'apprentissage de la théorie qui se répercute en une organisation de la connaissance de cette théorie non suffisamment intégrée qui a tendance à se sédimentariser.

Dans ce qui suit nous élaborerons un modèle nous permettant de mieux poser les coordonnées de l'apprentissage d'un concept complexe intégré du calcul infinitésimal dans le context collégial.

2. Modèle permettant d'analyser l'apprentissage de concepts complexes intégrés du calcul infinitésimal

La section qui suit présente une description des différents types d'information que peut discriminer l'intellect ainsi que les modes de représentation qu'a celui-ci pour traiter ces types d'information De plus, une association intime de ces deux composants sera proposée. Ensuite nous nous attarderons, dans la deuxième section, à présenter deux illustrations de l'utilisation du nouvel outil d'analyse constitué des types d'information, des modes de représentation et de leurs articulations.

2.1 Modes de représentation et types d'information

L'intelligence humaine a la capacité d'apprendre, c'est-à-dire d'intériorer et de se fabriquer des modèles intérieurs qui remplacent les chose, les faits ou les évènements en leur absence. Elle est aussi capable d'en rendre compte par l'une ou l'autre forme de communication: gestuelle, verbale, symbolique, etc.

Certains auteurs, dont Bruner et Guilford, ont décrit des modes de représentation ainsi que les types d'information que peut traiter l'intellect.

Dans ce qui suit nous n'avons pas l'intention de résumer toute la pensée de Bruner et de Guilford. Cependant, nous avons retenu certains éléments de leur modèle qui sont susceptibles de nous fournir des outils pour traiter le sujet qui nous intéresse.

Selon Bruner, l'individu possède trois modes de représentation: 1) sensori-moteur *(enactive),* 2) imagerie mentale *(iconic)* et 3) symbolique *(symbolic).*

Modes de représentation	Médias
Sensori-moteur	Les sens, l'action
Imagerie mentale	L'image, l'analogie
Symbolique	Le symbolisme la logique

Modes de représentation selon Bruner
Figure 1

Le mode sensori-moteur ou "enactive" est un système de traitement de l'information qui utilise les sens comme médiateurs pour rendre significatifs les choses ou les événements de la réalité. C'est à travers l'action immédiate sur ceux-ci que l'intelligence se construit des modèles intérieurs.

Le mode "imagerie mentale" est un système de traitement de l'information qui permet à l'intellect de se représenter celle-ci sous forme d'images, d'analogies, etc.

Le mode symbolique est un système de traitement de l'information qui utilise le symbolisme et la logique comme médiateur.

Ainsi, pour Bruner, les modes de représentation sont "trois systèmes parallèles" pour traiter et se représenter l'information, un à travers la manipulation et l'action, un à travers l'organisation perceptuelle et l'imagerie, l'autre par l'appareillage symbolique". [Bruner, J , 1966. *Towards a theory of instruction,* p. 28]

En étudiant la structure de l'intelligence, Guilford a, pour sa part, identifié quatre contenu ou types d'information que l'intelligence peut discrimer: 1) un contenu figural, 2) un contenu symbolique, 3) un contenu sémantique et 4) un contenu comportemental.

Selon Guilford le contenu figural correspond à toutes informations concrètes telles que perçues par les sens ou rappelées sous forme d'images Chaque fois que l'intellect perçoit les éléments sensoriels ou leurs substituts, il agit sur un contenu figural.

Lorsqu'une information a fait l'objet d'une codification quelconque, on peut parler de contenu symbolique Les objets mathématiques se présentent bien sous cette forme.

Types d'information ou contenus	Informations correspondantes
Figural	Information concrète perçue par les sens ou rappelée sous forme d'images
Symbolique	Information codifée
Sémantique	Significations véhiculées par l'information
Comportemental	Information véhiculée par le comportement

Les contenus selon le modèle de Guilford
Figure 2

Un contenu sémantique d'une information est l'ensemble des significations véhiculées à travers cette information. Les significations véhiculées à travers les mots parlés ou écrits s'apparentent au contenu sémantique.

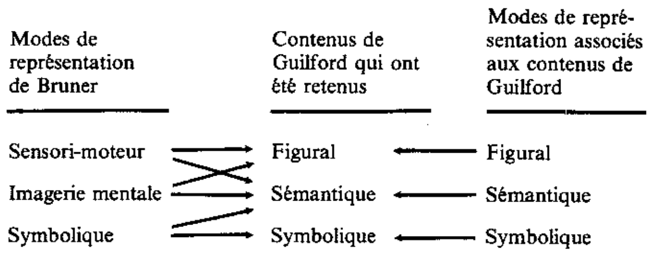
Le contenu comportemental est tout ce qui est véhiculé au niveau du comportement: expression du visage, émotions, attitudes, etc. (Figure 2)

Cette partie du modèle de Guilford concernant les contenus peut être mise en relation avec le modèle de Bruner Pour ce faire, rappelons que les contenus de Guilford sont les types d'information que l'intellect peut discriminer et que les modes de représentation de Bruner s'identifient à des systèmes de traitement de l'information. Ainsi, nous postulons qu'à un type d'information que peut discriminer l'intellect correspond un système de traitement de ce type d'information. Nous avons donc, en conservant la terminologie de Guilford, les modes de représentation suivants: comportemental, figural, symbolique et sémantique Les modes de représentation de Bruner et les modes de représentation associés aux contenus de Guilford s'entrecoupent et accentuent certaines facettes de la représentation plutôt que telles autres. Par exemple, le mode figural correspond, en partie, aux modes "sensori-moteur" et "imagerie mentale" décrits par Bruner, tandis qu'une partie du mode sémantique est inclus dans le mode "imagerie mentale" (les analogies) De plus, pour Bruner chaque mode de représentation contribue à rendre significative l'information reçue. Ainsi on peut dire que dans notre contexte, Bruner connecte subtilement chacun de ses modes de représentation avec le mode de représentation sémantique. Pour ce qui est du mode de représentation "comportemental" qui est associé au contenu de même dénomination, lequel avait été hypothétisé par Guilford, on peut le rattaché de façon très parcellaire au mode "sensori-moteur"

Pour la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire l'apprentissage de concepts, de principes et de théories du calcul infinitésimal, nous avons privilégié et retenus les modes de représentation suivants: figural, symbolique et sémantique.

Nous n'avons pas retenu la classification de Bruner concernant les modes de représentation parce que celle-ci ne nous permet pas de traiter les significations indépendamment des symboles, des images, ou d l'action.

De plus, nous n'avons pas conservé le contenu comportemental de Guilford ainsi que son mode de représentation parce que ceux-ci ne jouent pas, à notre avis, un rôle déterminant dans notre contexte qui privilégie les facteurs de nature cognitive. Deux raisons expliquent, tout au moins en partie, cette situation. D'une part, l'objet de notre étude concerne l'apprentissage de concepts, de propriétés et de théories du calcul infinitésimal qui sont abstraits, complexes, interconnectés, articulés et structurés D'autre part, de même qu'en conséquence, les apprenants qui nous intéressent sont de jeunes adultes de niveau collégial ayant 18 ans et plus On conçoit bien dans un tel context que le contenu comportemental ainsi que son mode de représentation soient réduits à leur plus simple expression. On peut rassembler ce qui vient d'être dit en donnant le tableau suivant.



Une ligne orientée signifie que le mode de représentation sert à traiter, tout au moins en partie, le contenu pointé.

Figure 3

2.2 Articulation des types d'information soutenus par les modes de représentation

La description des modes de représentation de Bruner et des contenus de Guilford ainsi que leurs mise en relation sont intéressantes dans un context théorique Cependant, dans une situation réelle d'apprentissage il nous est apparu important d'introduire une articulation entre les types d'information pertinents en tenant compte des modes de représentation retenus, afin d'obtenir un outil d'analyse satisfaisant

Dans ce qui suit nous privilégierons les facteurs de nature cognitive. Ainsi l'articulation projetée des contenus retenus, s'inspirera des énoncés suivants:

> l'objectif cognitif d'apprentissage d'un concept consiste à intérioriser certains types d'information concernant ce concept dans le but d'en faire un concept complexe intégré;
>
> les stratégies utilisées pour atteindre cet objectif cognitif d'apprentissage s'appuient sur les actions opérées au niveau des modes de représentation pour transformer un type d'information en un autre.

Le concept qui nous préoccupe particulièrement dans cet article est celui de la limite. Nous allons illustrer une articulation de certains type d'information à partir d'un exemple et de l'analyse de celui-ci dans le contexte de la formation du concept de limite.

Considérons la suite suivante de nombres:

0,9
0,99
0,999
0,9999
0,99999
----
etc

Nous nous intéressons à analyser le comportement de cette suite de nombres. Entre autres informations, l'on peut se demander quel sera le prochain nombre? (0,999999) Quel est le *n*ième terme de cette suite? Pour répondre à cette question nous introduisons le symbolism suivant. Désignons par $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = 0{,}99$; $x_3 = 0{,}999$; $x_4 = 0{,}9999$; $x_5 = 0{,}99999$; $x_6 = 0{,}999999$. Ceci est une information de type symbolique. Cependant de par son traitement par l'intellect, elle induit une information de type sémantique, à savoir

le premier terme a un 9 après la virgule;
le deuxième terme a deux 9 après la virgule;
le troisième terme a trois 9 après la virgule;
le quatrième terme a quatre 9 après la virgule;
le cinquième terme a cinq 9 après la virgule;
le sixième terme a six 9 après la virgule;
etc.

Cette information de type sémantique impose donc à l'esprit que le *n*ième terme aura "n" 9 après la virgule D'où l'induction de l'information de type symbolique

$$x_n = \underbrace{0{,}99\text{----}9}_{n \text{ termes}}$$

Si on synthétise ce que l'on vient d'exécuter on trouve le schéma suivant:

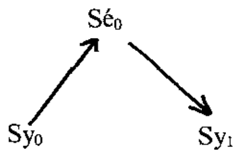


Figure 4

Sy_0 signifie l'information de type symbolique: $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = 0{,}99$; $x_3 = 0{,}999$ etc;

$Sé_0$ signifie l'information de type sémantique: le premier terme a un 9 après la virgule; le deuxième terme a deux 9 après la virgule, etc;

Sy_1 signifie l'information de type symbolique: $x_n = \underbrace{0{,}99\text{----}9}_{n \text{ termes}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Les lignes pleines orientées indiquent une transformation, effectuée par l'intellect, d'un type d'information en un autre ou en un même type.

Si on revient à notre suite originelle, on peut se préoccuper maintenant du comportement tendanciel de cette suite de nombres Pour ce faire nous reportons sur une droite graduée les premiers nombres de la suite. Ceci donne

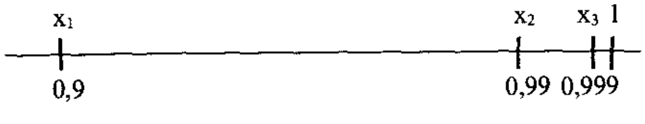


Figure 5

A la suite de l'exécution de ce dessin à l'échelle, on "voit" qu'en parcourant les éléments de cette suite, tout au moins pour les premiers termes, on s'approche de 1. Ici encore on constate qu'une information de type symbolique a induite une information de type figural qui elle a induite une information de type sémantique. Si l'on schématise ce que l'on vient de dire on obtient

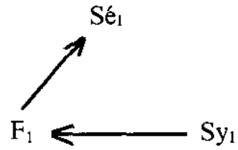


Figure 6

Sy_1 signifie l'information de type symbolique: $x_n = \underbrace{0{,}99\text{----}9}_{n \text{ termes}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

F_1 signifie l'information de type figural qui est le dessin à l'échelle;

$Sé_1$ signifie l'information de type sémantique: on s'approche de 1 en parcourant les éléments de la suite.

Il ne reste plus pour boucler la boucle que d'induire l'information de type symbolique qui cristalise la sémantique: on s'approche de 1 en parcourant les éléments de la suite. On note ceci par

$$x_n \to 1,\ n \to \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

On a donc le schéma

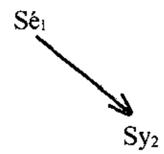


Figure 7

$Sé_1$ signifie l'information de type sémantique: on s'approche de 1 en parcourant les éléments de la suite;

Sy_2 signifie l'information de type symbolique: $x_n \to 1,\ n \to \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Rassemblons les schémas précédents en un seul. Ceci donne la figure 8.

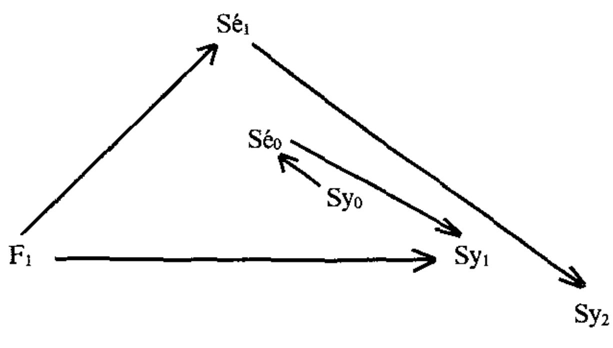


Figure 8

L'exemple précédent n'est pas l'unique, ni nécessairement la meilleure façon de présenter le concept de limite. Il se veut cependant une illustration de l'outil d'analyse que l'on propose.

2.3 Analyse d'un cas cité dans la problématique

Le nouvel outil que nous venons d'introduire nous permet de mettre en lumière, d'une manière encore plus évidente, la discontiguité, soulignée dans la problématique concernant le thème de limite de fonctions.

Généralement le concept de limite de fonctions est abordé en privilégiant le mode de représentation figural. L'argumentation typique est rattachée à l'étude de la situation picturale suivante

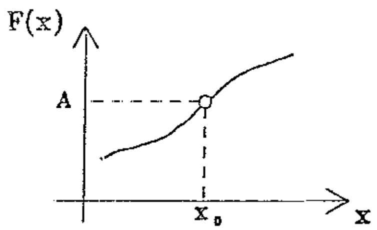


Figure 9

pour induire une première sémantique du concept de la limite de la fonction $f(x)$ lorsque la variable x tend vers x_0. Lorsque cette sémantique est bien implantée on la caractérise par le symbolisme suivant

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Le schéma synthétisant l'articulation précédente du concept de limite de fonction est le suivant:

$$\begin{tikzcd} & \text{Sé}_c \arrow[dr] & \\ \text{F}_c \arrow[ur] & & \text{Sy}_c \end{tikzcd}$$

Figure 10

F_c signifie l'information de type figural: cf. Figure 9;

Sé_c signifie l'information de type sémantique: $f(x)$ tend vers A lorsque x tend vers x_0;

Sy_c signifie l'information de type symbolique: $f(x) \to A$, $x \to x_0$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

En ce qui concerne les propriétés de la limite de fonctions, elles sont fréquemment abordées en mettant l'emphase sur le mode de représentation symbolique. Un exemple classique de cette approche consiste à faire calculer par approximations successives

$$\lim_{x \to 2} x^2 + 4x$$

et ses molécules

$$\lim_{x \to 2} x; \ \lim_{x \to 2} 4x; \ \lim_{x \to 2} x^2; \ \lim_{x \to 2} x^2 + 4x$$

pour induire les propriétés des limites. Les propriétés impliquées sont celles des limites de somme de fonctions, de produit de fonctions et de produit d'une fonction par une constante. Après quelques exemples de type semblable des sémantiques de ces phénomènes s'établissent. Celles-ci sont:

> la limite d'une somme de deux fonctions est la somme des limites de chaque fonction;
>
> la limite d'un produit d'une constante par une fonction est le produit de la constante par la limite de la fonction;
>
> la limite d'un produit de deux fonctions est le produit des limites de chaque fonction.

Ensuite on symbolise ces sémantiques de la façon suivante:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

On refère à ces formules en utilisant le vocable de propriétés des limites de fonctions. La situation précédente se schématise comme suit

$$\begin{tikzcd} & \text{Sé}_p \arrow[dr] & \\ \text{Sy}_{1_p} \arrow[ur] & & \text{Sy}_{2_p} \end{tikzcd}$$

Figure 11

Sy_{1_p} signifie l'information de type symbolique concernant les approximations successives de $\lim\limits_{x \to 2} x$; $\lim\limits_{x \to 2} 4x$; $\lim\limits_{x \to 2} x^2$; $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 4x$;

Sé_p signifie l'information de type sémantique concernant les propriétés considérées des limites;

Sy_{2_p} signifie l'information de type symbolique concernant les propriétés considérées des limites.

Ce qui ressort des deux situations d'apprentissage précédentes et ceci est clairement mis en lumière à l'aide du modèle proposé (cf figure 12), c'est que cette approche globale du thème de la limite, qui est somme toute très courante, conduit à des sémantiques juxtaposées du concept des propriétés de la limite de fonctions, plutôt qu'à une intégration de ces deux sémantiques, pour former un concept enrichi, diversifié et intégré de la limite de fonctions. Comprenons-nous bien, ce qui est mis en cause n'est pas tant l'approche pour aborder le concept de limite de fonctions ou celles utilisées pour aborder les propriétés mais bien leurs manques d'intégration, leurs manques de contiguité On peut visualiser ce manque de contiguité en réunissant en un seul schéma des deux précédents.

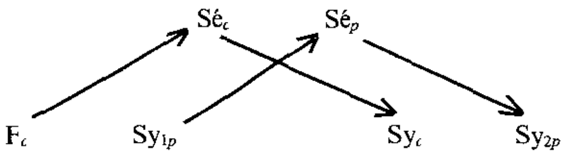


Figure 12

Ce qui ressort immédiatement de ce schéma c'est la pauvreté des interconnections qui conduit à une certaine sédimentation des informations reliées au concept et à ses propriétés.

3. Illustrations de présentations conduisant à l'intégration d'un concept complexe

Le concept complexe qui nous préoccupe est celui de la limite de fonctions. Dans ce qui suit nous allons proposer une démarche conduisant, selon nous, à une intégration plus poussée du concept complexe qu'est la limite de fonctions avec quelques-une de ses propriétés.

Considérons d'abord l'intériorisation d'une première sémantique du concept de limite de fonctions. On peut obtenir cette première sémantique en considérant la figure suivante où θ est l'angle qu'il y a

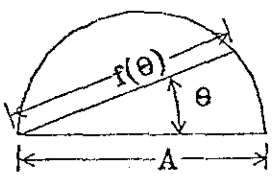


Figure 13

entre les deux segments de droite et $f(\theta)$ est la longueur de la sécante pour un θ donné. Le segment de droite horizontal est fixe de longueur A. Par rapport à cette figure, on s'intéresse au comportement de la longueur $f(\theta)$ du segment sécant lorsque l'angle θ s'approche de plus en plus de 0. En agissant mentalement sur le dessin on s'aperçoit que $f(\theta)$ s'approche de plus en plus de A, lorsque θ s'approche de 0. Plus précisément, $f(\theta)$ tend vers A lorsque θ tend vers 0. Ceci se symbolise en écrivant $f(\theta) \rightarrow A,\ \theta \rightarrow 0$. Une autre façon de noter ceci est de dire que $\lim\limits_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = A$. Par rapport à notre modèle l'approche précédente se schématise comme suit:

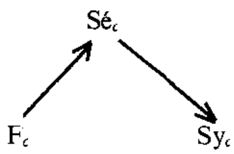


Figure 14

F_c signifie l'information de type figurale soutenue par la figure, mais ne se limitant pas strictement à celle-ci;

$Sé_c$ signifie l'information de type sémantique enchâssée dans la phrase:
"la longueur $f(\theta)$ du segment sécant tend vers la longueur A du segment de droite fixe lorsque l'angle θ tend vers 0";

Sy_c signifie l'information de type symbolique donnée par

$$f(\theta) \rightarrow 0,\ \theta \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) \rightarrow 0.$$

Nous allons enrichir notre sémantique du concept de limite en traitant une propriété de ce concept. La propriété de la limite de fonctions sur laquelle nous focalisons présentement est celle qui lie la limite de fonctions avec la somme de fonctions. Pour ce faire considérons la figure 15

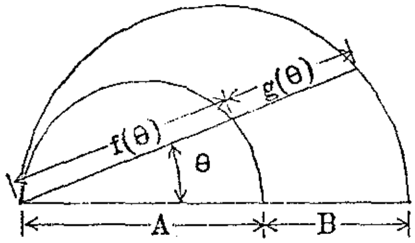


Figure 15

où chacun des symboles est défini à partir de la figure 15 et de ce qui a été fait précédemment. Ici on s'intéresse au comportement limite de la somme des longueurs de segment de droite lorsque l'angle devient de plus en plus petit. Si on efface la portion de cercle située à l'intérieur on obtient la figure 16

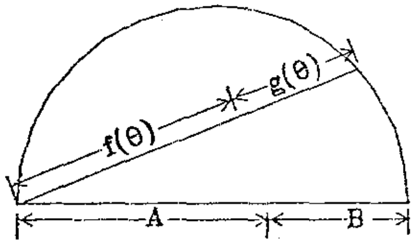


Figure 16

Par l'approche précédente on sait que la longueur du segment de droite sécant tend vers la longueur du segment de droite horizontal fixe lorsque l'angle tend vers 0. Ceci se traduit symboliquement en écrivant

$$f(\theta) + g(\theta) \rightarrow A + B,\ \theta \rightarrow 0$$

$$\text{ou} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} [f(\theta) + g(\theta)] = A + B$$

D'autre part, en considérant les figures suivantes et en reprenant le même cheminement qu'on a suivi lors de la

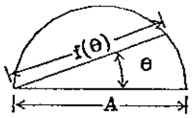


Figure 17(a)

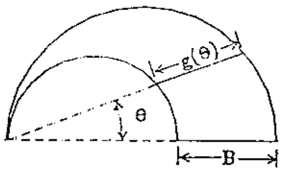


Figure 17(b)

formation de la première sémantique du concept de limite de fonctions, on obtient sémantique puis symboliquement

$$f(\theta)\to A,\ \theta\to 0$$
$$g(\theta)\to B,\ \theta\to 0$$
$$\text{ou}\quad \lim_{\theta\to 0} f(\theta)=A,\ \lim_{\theta\to 0} g(\theta)=B$$

Ainsi la sémantique de la liaison entre la limite de fonctions et la somme de fonctions ressort clairement. Ceci s'exprime comme suit: "la limite d'une somme de fonctions est donnée par la somme des limites de fonctions" Symboliquement on a:

$$\lim_{\theta\to 0} [f(\theta)+g(\theta)]=\lim_{\theta\to 0} f(\theta)+\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$$

Si on synthétise l'approche précédente à l'aide d'un schéma on a

$$\begin{tikzcd} & \text{Sé}_c \arrow[rr] \arrow[drr] & & \text{Sé}_s \arrow[dr] & \\ \text{F}_c \arrow[ur] & \text{F}_s \arrow[l] & & \text{Sy}_c \arrow[r] & \text{Sy}_s \end{tikzcd}$$

Figure 18

F_c signifie l'information de type figural soutenue successivement par les figures 16, 17(a), (b);

F_s signifie l'information de type figural soutenue par la figure 15;

Sé_c signifie l'information de type sémantique enchâssée dans les phrases suivantes:

la longueur totale du segment sécant tend vers la longueur totale du segment horizontal, lorsque l'angle tend vers 0;

la longueur du segment partiel $f(\theta)$ tend vers la longueur A du segment partiel horizontal, lorsque l'angle tend vers 0;

la longueur du segment partiel $g(\theta)$ tend vers la longueur B du segment partiel horizontal, lorsque l'angle tend vers 0;

Sy_c signifie l'information de type symbolique comprise dans les formules suivantes:

$$\lim_{\theta\to 0} [f(\theta)+g(\theta)]=A+B$$
$$\lim_{\theta\to 0} f(\theta)=A$$
$$\lim_{\theta\to 0} g(\theta)=B$$

Sé_s signifie l'information de type semantique enchassee dans la phrase "la limite d'une somme de fonctions est donnee par la somme des limites de fonctions";

Sy_s signifie l'information de type symbolique comprise dans la formule

$$\lim_{\theta\to 0} [f(\theta)+g(\theta)]=\lim_{\theta\to 0} f(\theta)+\lim_{\theta\to 0} g(\theta)$$

Intéressons nous maintenant à la liaison qu'il y a entre la limite de fonctions et le produit de fonctions. Considérons les figures 19

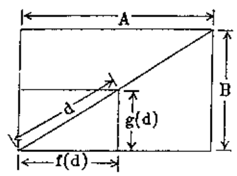


Figure 19(a)

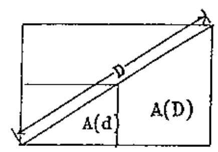


Figure 19(b)

Dans un premier temps on constate, à partir de la figure 19(b), que lorsque la longueur de la diagonale du rectangle partiel d tend vers la longueur de la diagonale du grand rectangle D, l'aire du rectangle partielle $A(d)$ tend vers l'aire du grand rectangle $A(D)$. En reprenant un cheminement semblable à celui utilisé lors de l'étude de la propriété de la somme de limites on obtient le schéma suivant.

$$\begin{tikzcd} & \text{Sé}_c \arrow[dr] & \\ \text{F}_c \arrow[ur] & & \text{Sy}_c \end{tikzcd}$$

Figure 20

F_c signifie l'information de type figural soutenue par la figure 19, mais ne se limitant pas strictement à celle-ci;

Sé_c signifie l'information de type sémantique enchâssée dans la phrase "l'aire du rectangle partiel tend vers l'aire du grand rectangle, lorsque la longueur de la diagonale du rectangle partiel tend vers la longueur de la diagonale du grand rectangle";

Sy_c signifie l'information de type symbolique donnée par $A(d)\to A(D),\ d\to D$ ou $\lim_{d\to D} A(d)=A(D)$.

Si on considère maintenant la figure 19(a) on a que l'aire du rectangle partiel est donnée par le produit de la longueur de sa base par celle de sa hauteur Il en est de même pour l'aire du grand rectangle. Ceci a comme conséquence que le produit de la longueur de la base par la longueur de la hauteur du rectangle partiel tend vers le produit de la longueur de la base par la longueur de la hauteur du grand rectangle Ceci se traduit par

$$f(d) \cdot g(d) \rightarrow A \cdot B,\ d \rightarrow D$$

ou $\lim\limits_{d \to D} [f(d) \cdot g(d)] = A \cdot B.$

D'autre part, en reprenant le même cheminement qu'on a suivi lors de la formation de la sémantique du concept de limite de fonctions on obtient sémantique puis symboliquement

$$f(d) \rightarrow A,\ d \rightarrow D$$

$$g(d) \rightarrow B,\ d \rightarrow D$$

ou $\lim\limits_{d \to D} f(d) = A,\ \lim\limits_{d \to D} g(d) = B.$

Ainsi la sémantique de la liaison entre la limite de fonctions et le produit de fonctions ressort clairement Celle-ci s'exprime comme suit: "la limite d'un produit de fonctions est donnée par le produit des limites de fonction" Symboliquement on a

$$\lim_{d \to D} [f(d) \cdot g(d)] = \lim_{d \to D} f(d) \cdot \lim_{d \to D} g(d).$$

Si on synthétise l'approche précédente à l'aide de notre modèle on a

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Sé}_c \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Sé}_p \arrow[dr] & \\
F_c \arrow[ur] & F_p \arrow[l] & \text{Sy}_c \arrow[u] \arrow[r] & \text{Sy}_p
\end{tikzcd}$$

Figure 21

F_c signifie l'information de type figural soutenue par la figure 19(b), mais ne se limitant pas strictement à celle-ci;

F_p signifie l'information de type figural soutenue par la figure 19(a);

Sé_c signifie l'information de type sémantique enchâssée dans les phrases suivantes:

l'aire du rectangle partiel *A(d)* tend vers l'aire du grand rectangle *A(D)*, lorsque la longueur de la diagonale du rectangle partiel *d* tend vers la longueur de la diagonale du grand rectangle *D*;

la longueur de la base du rectangle partiel *f(d)* tend vers la longueur de la base du grand rectangle *A*, lorsque la longueur de la diagonale du rectangle partiel tend vers la longueur de la diagonale du grand rectangle *D*;

la longueur de la hauteur du rectangle partiel *g(d)* tend vers la longueur de la hauteur du grand rectangle *B*, lorsque la longueur de la diagonale du rectangle partiel *d* tend vers la longueur de la diagonale du grand rectangle *D*;

Sy_c signifie l'information de type symbolique comprise dans les formules suivantes:

$$\lim_{d \to D} [f(d) \cdot g(d)] = A \cdot B$$

$$\lim_{d \to D} f(d) = A$$

$$\lim_{d \to D} g(d) = B$$

Sé_p signifie l'information de type sémantique enchâssée dans la phrase "la limite d'un produit de fonctions est donnée par le produit des limites de fonctions";

Sy_p signifie l'information de type symbolique comprise dans la formule

$$\lim_{d \to D} [f(d) \cdot g(d)] = \lim_{d \to D} f(d) \cdot \lim_{d \to D} g(d).$$

Dans l'approche précédente la sémantique et la symbolique associées au calcul de l'aire d'un rectangle interviennent Nous n'avons pas souligné ces faits parce qu'ils ne sont pas l'objet premier de nos préoccupations.

Intéresson-nous maintenant à une dernière propriété de la limite de fonctions. La propriété qui nous intéresse est celle qui lie la limite de fonctions, avec les inégalités entre les fonctions. Pour ce faire considérons les figures 22.

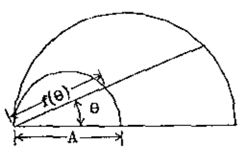


Figure 22(a)

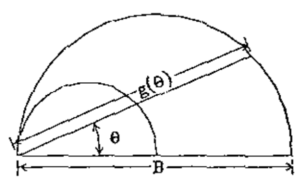


Figure 22(b)

Dans un premier temps on "voit" que lorsque l'angle θ tend vers 0 chacune des longueurs des segments tend respectivement vers les longueurs A et B Cette sémantique se traduit symboliquement en écrivant

$$f(\theta) \rightarrow A,\ \theta \rightarrow 0;\ g(\theta) \rightarrow B,\ \theta \rightarrow 0;$$

ou $\lim\limits_{\theta \to 0} f(\theta) = A;\ \lim\limits_{\theta \to 0} g(\theta) = B.$

D'autre part, la longueur du segment de droite $f(\theta)$ est plus petite ou égale à la longueur du segment de droite $g(\theta)$ et ceci pour chaque angle θ positif et inférieur à un angle droit. Aussi la longueur du segment de droite A est plus petite ou égale à la longueur du segment de droite B. Ainsi l'inégalité est préservée par passage à la limite. On a donc la sémantique suivante: si pour chaque angle θ positif et inférieur à un angle droit on a que la longueur $f(\theta)$ est plus petite ou égale à la longueur $g(\theta)$, alors les limites satisferont la même inégalité. Ceci se traduit symboliquement de la façon suivante:

si $f(\theta) \leq g(\theta)$ pour tous les $\theta \in]0, \pi/2[$

alors $\lim_{\theta \to 0} f(\theta) \leq \lim_{\theta \to 0} g(\theta)$

On pourrait refaire ce qui precede au point $\pi/2$ pour montrer que l'egalite dans la conclusion est essentielle. Schematiquement on a

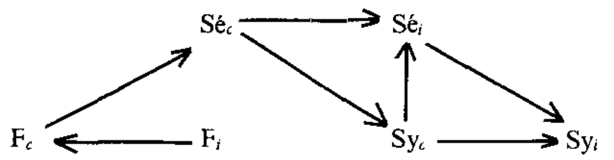


Figure 23

(Le lecteur est invité ici à fournir lui-même les détails de l'analyse.)

Dans l'approche précédente la sémantique et la symbolique associées aux inégalités de nombres interviennent. Nous n'avons pas souligné ces faits parce qu'ils ne sont pas l'objet premier de notre étude

Si on rassemble dans un même schéma, les schémas apparaissant aux figures 14, 18, 21 et 23 on obtient le schéma suivant, où l'on voit clairement l'intégration du concept complexe "limite de fonctions". (Figure 24)

Remarquons que nous n'avons pas présenté toutes les propriétés de la limite de fonctions. Cependant les propriétés dont nous avons esquissées la présentation en s'appuyant sur le mode de représentation figural, sont suffisamment représentatives pour montrer l'intérêt du modèle que nous proposons Il est à noter aussi que nous nous sommes restreints uniquement au mode de représentation figural pour démarrer nos présentations On aurait pu facilement s'appuyer sur le mode de représentation symbolique. D'ailleurs les deux approches sont à conseiller Si nous nous sommes restreints de la sorte, c'est pour illustrer un type de présentations qui n'est pas très courant quoique pertinant et intéressant.

Conclusion

Dans le présent article, nous avons présenté un modèle servant d'outil d'analyse de l'apprentissage de concepts complexes du calcul infinitésimal Celui-ci pourrait également fournir à l'enseignant un outil de plus pour analyser ses stratégies d'enseignement, au même titre qu'il nous a permis de mettre en lumière certains problèmes soulignés dans la problématique.

Les schémas que nous avons obtenues en s'inspirant du modèle ne se veulent pas des archétypes. Toutefois, les exemples que nous avons donnés ont illustré que le modèle pouvait conduire à une approche intégrant plus le concept complexe qu'est la limite de fonctions

Le modèle que nous venons d'élaborer peut aussi être utilisé dans le contexte de l'apprentissage des autres thèmes du calcul infinitésimal, de même que dans d'autres thèmes de la mathématique Nous nous sommes concentré sur le thème de la limite pour garder un fil conducteur tout au long de l'article et ne pas nous éparpiller inutilement, évitant ainsi au lecteur des sources potentielles de distractions

Le thème de la limite a été choisi parce que celui-ci est fondamentale dans la théorie du calcul infinitésimal qui est une des matières cardinales du niveau collégial.

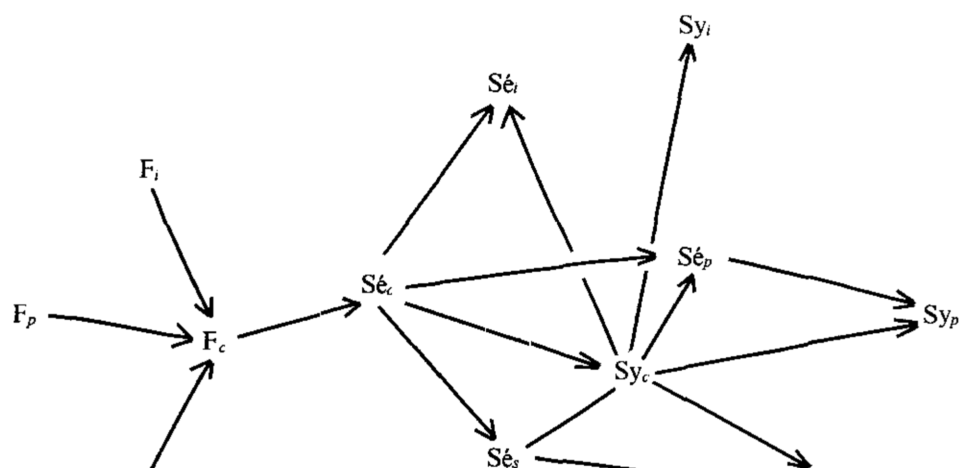


Figure 24

Références

Anderson, Osiefield, The role of counter examples in a first course in calculus Ohio State University, 1970

Bruner, Jerome., *Towards a theory of instruction*. Harvard University Press, Cambridge, 1966

Bruner, J., *et al* *Studies in cognitive growth* John Wiley & Sons, New York, 1966

Campbell, Marlène L. Education and mathematics in the United States, 1607-1977: A brief history Southern Illinois University Carbondale, 1978

Chaney, George L., The effect of a formal study of the mathematical concept of limit in high school. University of Kansas, 1967

Confrey, Jere, Conceptual change. number concepts and the introduction to calculus Cornell University, 1980

Coon, Dorothy T. The intuitive concept of limit possessed by the pre-calculus college student Ohio State University, 1972

Guilford, J P., Hoepfner. R., The structure of the intellect. *Pyschological Bulletin* Vol. 53, 267-293, 1956

Guilford, J.P., Hoepfner, R, Structure of intellect factors and their tests Report from the psychological laboratory, University of Southern California, no 36, 1966

Jackson, Hermann, A comparison of the effectiveness of three instruction formats in introductory calculus on student achievement and attribution. University of Tennesee. 1978

Kongkitpsial, Piyarat, The effect of two instructional approaches on logical concept learning of first year college students University of Michigan, 1979

Lackner, Lois M, The teaching of the limit and derivative concepts in beginning calculus by combinations of inductive and deductive approaches. University of Illinois, 1968

McGannon, Thomas H., A comparison of two methods of teaching calculus with special inquiry into creativity. Northwestern University, 1970

Marchegiani, Boris V., Effects of two calculus treatments upon achievement and critical thinking ability. University of Tennesee, 1977

Pavlick Frank M, The use of advanced sets in the teaching of limits: a comparative study. Florida State University, 1968

Schmidt, Philip A, Understanding in mathematics: some philosophical and psychological considerations Syracuse, 1977

Shelton, Ronald M, A comparison of achievement resulting from teaching the limit concept in calculus by two different methods University of Illinois. 1965

Stumpff, Howard K. The nature and levels of rigor in the teaching of college calculus University of Kansas, 1968

Tawfik, Ibrahim A, A computer-assisted instruction program for teaching the concepts of limits in freshman calculus (a comparative study). State University of New York, Buffalo 1970

Thompson, Samuel B, An experiment in individualized mastery learning of college calculus University of Colorado, Boulder 1978

In actual fact, every child, after he has reached a certain level of intelligence, will say "because the numbers must go on, there cannot be a last number" What makes him say this is something more than having been habituated to follow a certain line, to follow it *blindly*—he *sees* that he can go on, he *sees* that there is an infinite possibility The endlessness of the number series, far from being the result of adopting an arbitrary convention, is one of the first and most significant discoveries made right at the beginning of mathematics ... It is upon this essential insight that the number series hinges—with all the problems of a specifically mathematical kind, and leading up to higher theories and more and more remote ranges of mathematical thought. Yet already here, at the source of all this, you see that we do not proceed in an *arbitrary* manner. We *generate* the numbers, yet we have no choice to proceed otherwise. There is already something there that *guides* us. So we make, and do not make numbers.

What is so disquieting is that we can evidently not *control* the process. As with numbers, so with mathematics in general. We cannot *control* mathematics. The creation is stronger than the creator.

Friedrich Waismann