L'Infini, un Ensemble de Nombres? Enquête auprès de Futurs Enseignants et Enseignantes

ROBERTA MURA, LOUISE MAURICE

Dans le cadre d'une recherche sur les idées que des élèves du collégial se font des situations d'indétermination et d'impossibilité dans le calcul des limites des fonctions rationnelles [1], des élèves de douzième année ont exprimé des idées sur l'infini qui, à notre connaissance, ne sont pas répertoriées dans les écrits sur le sujet. En particulier, nous avons été surprises d'entendre ces élèves affirmer que l'infini représente l'ensemble de tous les nombres ou n'importe quel nombre. Ces conceptions ne sont pas mentionnées dans les divers articles que nous avons consultés ni dans la recension effectuée par Tall (1992). Nous avons alors voulu vérifier si ce genre d'idées sur l'infini se retrouvaient aussi parmi des étudiantes et des étudiants se destinant à l'enseignement primaire ou secondaire. Le but principal du présent article est de faire état des résultats obtenus à l'occasion de notre étude, mais nous donnerons également des indications sur les observations qui l'ont déclenchée.

Rappelons d'abord très brièvement quel est le 'savoir officiel' au sujet de l'infini, c'est-à-dire le savoir reconnu par la communauté mathématique [2] Distinguons, au départ, l'infini *potentiel* et l'infini *actuel*, même si une telle distinction n'est pas toujours faite explicitement dans le contexte de l'enseignement des mathématiques. L'infini potentiel se réfère à la possibilité théorique de réitérer un processus sans arrêt: par exemple, on peut toujours doubler une grandeur donnée (ou la diviser en deux) et l'on peut toujours ajouter une unité à un nombre naturel donné. A n'importe quel moment, toutefois, on n'aura effectué qu'un nombre fini d'itérations du processus, on n'aura compté, par exemple, qu'un nombre fini de nombres. L'infini actuel, au contraire, renvoie à un objet, idéal, conçu comme étant infini actuellement, c'est-à-dire maintenant, d'emblée, de façon accomplie: c'est le cas, par exemple, de l'ensemble des points d'un segment ou de l'ensemble de tous les nombres naturels.

En mathématiques, dans le calcul des limites, l'expression 'x tend vers l'infini' est normalement interprétée comme signifiant un processus *potentiellement infini*: x croît infiniment, x croît au-delà de toute borne. Il nous semble cependant que l'expression consacrée soit tendancieuse et qu'elle laisse croire que 'l'infini' soit un objet qui existe et vers lequel x tend. L'emploi du symbole '∞' ne fait qu'augmenter le risque de réifier indûment ce qui ne devrait être qu'une locution adverbiale (croître *à l'infini*). La confusion est encore plus grande lorsqu'on dit qu'une limite est égale à l'infini. Alors que la définition standard cache l'infini derrière un quantificateur universel, l'expression verbale 'égale à l'infini' et l'expression symbolique '$= \infty$' évoquent avec force l'existence de quelque chose qui s'appelle 'l'infini', puisque quelque chose d'autre peut, cette fois-ci, non seulement tendre vers lui, mais bien lui être égal.

Quant à l'infini actuel, comme le rappelle Tall (1992), on le rencontre en mathématiques, entre autres, dans la théorie des nombres transfinis de Cantor (cardinaux et ordinaux) ou dans les nombres hyperréels de l'analyse non standard de Robinson (ou dans d'autres constructions semblables, par exemple celles des nombres superréels ou surréels; ces constructions ont en commun le fait que les nombres infinis sont accompagnés de leurs inverses, les nombres infinitésimaux, ce qui n'est pas le cas pour les nombres transfinis).

En didactique, on a d'abord cherché à savoir si les élèves (Fischbein, Tirosh et Hess, 1979) ou les enseignantes et les enseignants (Martin et Wheeler, 1987) ont une intuition de l'infini, c'est-à-dire s'ils admettent l'existence de processus ou d'ensembles infinis. Ces chercheurs et chercheuses ont constaté qu'une telle intuition n'est pas toujours présente ou, si elle l'est, qu'elle n'est pas toujours stable. Wheeler et Martin (1988) ont poursuivi leur recherche en examinant la connaissance *explicite* que des futurs enseignants et enseignantes du primaire avaient de l'infini. A la question 'Qu'est-ce que l'infini?', ils ont obtenu des réponses faisant appel à des processus, soit un processus récursif (peu importe le nombre que l'on choisit, on peut toujours en trouver un plus grand en lui ajoutant une unité), soit un processus qui continue sans fin (les nombres continuent sans arrêt); dans les deux cas on reconnaît l'idée de l'infini potentiel.

Une autre question qui a retenu l'attention des didacticiennes et des didacticiens concerne les réactions que provoque la tâche de comparer deux ensembles infinis (par exemple, deux segments de longueur différente ou l'ensemble des nombres pairs avec l'ensemble de tous les nombres naturels). Autant parmi les élèves (Fischbein, Tirosh et Hess, 1979) que chez les futurs enseignants et enseignantes du primaire (Wheeler et Martin, 1988), on a observé la présence des 'mauvaises intuitions' suivantes: l'ensemble apparemment 'plus grand' est aussi le plus 'nombreux'; les deux ensembles sont équivalents parce que les deux sont infinis; et les deux ensembles ne peuvent être comparés parce que les deux sont infinis. Tall (1980) a fait remarquer que la première de ces 'mauvaises intuitions', tout en étant fausse du point de vue de la théorie des nombres cardinaux transfinis de Cantor, devient acceptable si l'on se situe dans

For the Learning of Mathematics 17, 3 (November 1997)
FLM PUBLISHING ASSOCIATION, Kingston, Ontario, Canada

la théorie des nombres surréels ou hyperréels. De ce dernier point de vue, il est possible d'affirmer, par exemple, qu'un segment deux fois plus long qu'un autre contient deux fois plus de points que celui-ci. Toujours à propos du même genre de tâche, Duval (1983) a observé un obstacle sans rapport avec la notion d'infini: la difficulté rencontrée par des élèves à reconnaître la correspondance biunivoque entre l'ensemble des carrés parfaits (C) et l'ensemble des nombres naturels (N) peut tenir à la nécessité de 'dédoubler' mentalement les carrés parfaits en les envisageant tantôt comme éléments de C, tantôt comme éléments de N.

Moreno et Waldegg (1991) ont repris des expériences semblables aux précédentes et ont comparé les réponses fournies par les élèves avec le développement historique du concept d'infini actuel en mathématiques. Ils rappellent que Galilée refusait de comparer deux ensembles infinis, alors que Bolzano considérait qu'un ensemble inclus proprement dans un autre était plus petit que celui-ci, même si les deux ensembles pouvaient être mis en correspondance biunivoque. Pour Bolzano, l'inclusion primait sur la correspondance biunivoque, et deux ensembles infinis qui n'étaient pas inclus l'un dans l'autre ne pouvaient toujours pas être comparés. A l'inverse, pour Cantor, la correspondance biunivoque primait sur l'inclusion, ce qui lui permettait de comparer n'importe quelle paire d'ensembles infinis. Les positions de Galilée et de Bolzano correspondent à certaines 'mauvaises intuitions' observées chez les élèves ou chez les enseignantes et les enseignants de nos jours.

Moreno et Waldegg ne tiennent pas compte de la critique formulée par Tall (1980) et ne font aucune référence à l'analyse non standard. Ils soulignent par ailleurs la distinction entre trois rôles grammaticaux du mot 'infini', selon qu'il est employé comme nom, comme adjectif ou comme adverbe. Ils remarquent que dans les mathématiques grecques l'infini ne pouvait intervenir que comme adverbe, le nom et l'adjectif étant réservés à la métaphysique. Les deux auteurs situent en fait au XIXe siècle l'introduction de l'infini comme un objet d'étude en mathématiques et ils considèrent que le pas décisif pour ce faire fut de concevoir l'infini comme un attribut d'une collection, c'est-à-dire comme un adjectif plutôt que comme un nom ou un adverbe.

Quant à nous, avant d'entreprendre la recherche dont il sera question ici, nous pensions que l'infini était perçu surtout comme un attribut pouvant caractériser un processus ou un ensemble, ou encore comme une sorte de nombre – naïvement, comme un nombre très grand ou un nombre plus grand que tous les autres, ou, plus savamment, comme un nombre transfini ou un nombre hyperréel. C'est au cours de la recherche menée par Louise Maurice que nous avons été placées pour la première fois devant des élèves affirmant que l'infini "c'est tous les chiffres", ou "n'importe quel chiffre". Nous avons alors voulu savoir si ce genre d'idées se retrouvaient aussi chez de futurs enseignants et enseignantes. Toutefois, avant d'aborder ce sujet, nous décrirons ici quelques-unes des observations faites auprès d'élèves du collégial.

Les observations à l'origine de la présente étude

Comme nous l'avons déjà mentionné, la recherche de Louise Maurice concerne les idées que des élèves du collégial se font des situations d'indétermination et d'impossibilité dans le calcul des limites des fonctions rationnelles. Elle a été réalisée au moyen d'entrevues avec dix élèves de première année du collégial (douzième année), l'année pendant laquelle est donné, au Québec, le premier cours de calcul différentiel. Nous avons interviewé chaque élève deux fois: la première fois avant le début des cours, durant l'été, et la seconde fois quatre semaines après le début des cours, au terme du module d'enseignement portant sur les limites. Le guide d'entrevue comportait 22 questions à leur poser au cours de chacun des deux entretiens et 3 questions supplémentaires à leur soumettre au moment du second entretien uniquement. De ces questions, 7 touchaient directement le concept d'infini ou le symbole '∞'. Les observations que nous rapportons ici ne constituent qu'une petite partie des résultats obtenus, résultats qui seront exposés en détail dans la thèse de doctorat de Louise Maurice.

La première question sur le sujet qui nous concerne invitait les élèves à expliquer le sens du signe '∞'. Au cours de la première entrevue, sept élèves ont affirmé qu'il désignait soit tous les nombres, soit les nombres positifs seulement. Quatre élèves ont donné l'une ou l'autre de ces réponses au second entretien. Voici quelques extraits de leurs propos: "c'est la totalité d'une droite", "c'est tous les nombres imaginables" (Bertrand, [3] 1er et 2e entretiens); "l'ensemble des nombres réels [...] de tous les nombres", "c'est l'ensemble de tous les chiffres" (Diane, 1er et 2e entretiens); "tous les chiffres, tous les nombres [...] tout ce qui existe comme numéros, comme chiffres", "tous les nombres [...] les chiffres négatifs puis les chiffres positifs" (Laure, 1er et 2e entretiens); "tous les nombres qui existent" (André, 1er entretien); "tous les chiffres [...] les fractions [...] ça peut être pair, impair, négatif, positif" (Sarah, 1er entretien); "ça serait tous les nombres positifs [...] quand on dit infini, c'est infini positif" (Ivan, 2e entretien); "juste les positifs [...] de zéro jusqu'à l'infini" (François, 1er entretien); "quand il n'y a pas de signe, c'est plus; ça serait les nombres réels" (Nadia, 1er entretien).

Lorsque nous avons demandé ensuite aux élèves si l'affirmation "L'infini représente l'ensemble de tous les nombres" était vraie ou fausse, au premier entretien, les dix, sans exception, ont répondu qu'elle était vraie et huit ont maintenu la même réponse au second entretien. Leurs explications allaient dans le même sens que celles citées plus haut; quelques élèves ont apporté plus de détails: "l'infini positif et l'infini négatif [...] l'ensemble de tous les nombres [...] entiers, irrationnels, rationnels" (François, 1er entretien); "ça représente tous les nombres, puis ça ne s'arrête jamais [...] ça peut être tous les nombres entre six et sept, toutes les fractions [...] cela fait partie de l'infini aussi" (Laure, 2e entretien); "ça représente l'ensemble de tous les nombres, en incluant les positifs et les négatifs [...] ça va du zéro [...] un, deux, trois, quatre, cinq, zéro, moins un, moins deux, moins trois, jusqu'à [...] l'infini. Les chiffres qu'on n'est même pas capable d'imaginer, en passant par un milliard, deux milliards, puis, etc., etc., dans le négatif et dans le positif" (Ivan, 1er entretien).

Non seulement des élèves ont affirmé spontanément que l'infini représentait l'ensemble de tous les nombres ou ont jugé vraie une telle affirmation lorsque nous la leur avons soumise, mais quelques élèves en ont aussi tenu compte dans divers contextes. En voici trois exemples. André, au premier entretien, attribue à '0/0' le sens d'infini parce que "n'importe quel nombre multiplié par zéro donne zéro, donc toutes les réponses sont bonnes". Pour Bertrand (2e entretien), '∞/∞' vaut 1 parce que "tu as une infinité de nombres divisée par une infinité de nombres; ça devrait s'équivaloir". Pour le même élève, '$\infty - \infty$' signifie l'ensemble vide "parce que [si] je prends toutes les valeurs possibles, puis j'en soustrais toutes les valeurs possibles, qu'est-ce qui reste? Il reste le néant, il ne reste rien" (1er entretien).

Avant de poursuivre, nous tenons à formuler une mise en garde importante. Nous avons cité dans les paragraphes qui précèdent une série d'extraits qui illustrent l'existence parmi les élèves interviewés d'une vision de l'infini comme étant un ensemble de nombres, notamment l'ensemble de tous les nombres. Il ne faut pas en déduire que ces élèves ont manifesté une telle conception de façon précise, stable et cohérente, comme les citations choisies pourraient le laisser croire. Au contraire, chaque entrevue foisonne d'hésitations et de contradictions. Tout ce que nous pouvons conclure est que, pour plusieurs des élèves interviewés, de façon plus ou moins saillante, l'idée de l'infini comme un ensemble de nombres faisait partie de leur paysage mental, ou, pour employer la terminologie de Tall et Vinner (1981), de leur 'concept image' de l'infini.

Quant à l'autre idée qui nous intéresse ici, huit élèves au premier entretien et neuf au second ont jugé vrai l'énoncé "L'infini est un nombre indéterminé". Dans leurs explications, certains élèves font appel au caractère imprécis, insaisissable et donc 'indéterminé' de l'infini, sans s'interroger sur son statut de nombre. D'autres reviennent sur l'idée que l'infini "c'est tous les nombres". Les trois explications suivantes, enfin, toutes recueillies à l'occasion du second entretien, manifestent plus clairement une adhésion à l'énoncé proposé: "tu peux prendre n'importe quelle valeur [...] une valeur infiniment grande ou petite" (Bertrand), "parce qu'on ne peut lui attribuer de valeur, ça peut être n'importe quel nombre" (Tess), "parce que ce n'est pas un nombre précis, ça peut être six, ça peut être six milliards" (Laure).

A une autre occasion, au cours de la même entrevue, cette dernière élève confirmera son opinion: "[l'infini] ça peut être n'importe quoi, comme une fraction, comme un chiffre négatif, comme un zéro, comme un chiffre positif". Même André, qui n'a pas su décider si la proposition que nous lui avions soumise était vraie ou fausse, s'est exprimé de façon semblable: "l'infini [...] pourrait prendre n'importe quelle valeur dans les nombres qui existent". Plus loin, il précisera: "l'infini ça comprend les complexes et les imaginaires" (1er entretien).

Parfois, des élèves ont fait intervenir cette conception de l'infini pour interpréter certaines formes symboliques. Ainsi, pour André, '∞/∞' signifie "n'importe quel nombre divisé par n'importe quel nombre". Invité à donner un exemple, il propose 'cinq divisé par trois' et il poursuit: "ça peut être n'importe quel nombre divisé par n'importe quel nombre. Ça peut égaler n'importe quel nombre aussi." C'est ainsi qu'il explique pourquoi il pense que '∞/∞' donne l'infini (1er entretien). Il adopte ensuite la même logique pour interpréter '$0 - \infty$': "tu prends zéro, puis tu lui soustrais n'importe quel nombre, ça va donner n'importe quel nombre [...] Si l'infini [valait] un nombre négatif, ça ferait un nombre positif." D'après Nadia, '$0/\infty$' "donnerait l'infini, parce que tu peux diviser par n'importe quoi" (1er entretien), tandis que selon Tess la même expression "est impossible [...] parce que [l'infini] est une variable, ce n'est pas un nombre déterminé [...] Tu ne peux pas dire [...] zéro tu divises par quoi; l'infini c'est un paquet de chiffres, tu ne peux pas dire lequel tu prends" (1er entretien).

Les données que nous avons rapportées indiquent la présence, chez plusieurs des élèves interviewés, de l'idée que l'infini, ou le symbole '∞', peut représenter un ensemble de nombres ou différents nombres. Certes, cette idée coexistait avec d'autres idées plus orthodoxes [4], mais elle était suffisamment enracinée pour que quelques élèves s'en servent pour décider du sens à donner à certaines formes symboliques faisant intervenir le signe '∞'. Il devient alors intéressant de chercher à savoir si des idées semblables se retrouvent également chez des populations plus âgées et plus scolarisées, notamment chez des étudiantes et des étudiants se destinant à l'enseignement primaire ou secondaire [5]. Nous abordons maintenant la description du sondage que nous avons réalisé à cette fin auprès d'une telle population.

La collecte des données

L'étude préliminaire

Nous avions bâti, dans un premier temps, un questionnaire comprenant les six énoncés suivants:

(1) L'infini est un nombre très grand

(2) L'infini est un nombre plus grand que tous les autres nombres.

(3) L'infini représente l'ensemble de tous les nombres.

(4) L'infini est un nombre indéterminé

(5) L'infini n'est pas un nombre.

(6) L'infini est une variable

Pour chacun des six énoncés, on devait se déclarer d'accord ou non et expliquer sa réponse. Le septième élément qui complétait le questionnaire était la question ouverte suivante: 'Qu'est-ce que l'infini signifie pour vous?' Nous étions intéressées surtout par les réactions aux énoncés 3, 4 et 6, les autres éléments du questionnaire étant destinés principalement à confirmer et à compléter l'information recueillie.

Nous avons administré le questionnaire à divers groupes d'étudiantes et d'étudiants inscrits à la première année du baccalauréat en enseignement préscolaire et primaire, du baccalauréat en enseignement secondaire (mathématiques) et du baccalauréat en mathématiques. Nous avons inclus ce dernier groupe, d'une part, parce qu'il comprend aussi de futurs enseignants et enseignantes (des étudiantes et des étudiants se destinant à l'enseignement collégial ou universitaire, ou pouvant s'intégrer plus tard au programme d'enseignement secondaire) et, d'autre part, parce que nous pensions que ce groupe était le moins susceptible d'entretenir des idées erronées sur des concepts mathématiques.

Dans l'ensemble, nous avons obtenu des taux d'accord variant entre 27% et 59% pour l'énoncé 3 ('L'infini représente l'ensemble de tous les nombres'), entre 48% et 79% pour l'énoncé 4 ('L'infini est un nombre indéterminé') et entre 28% et 44% pour l'énoncé 6 ('L'infini est une variable'). Ces résultats préliminaires nous ont fait décider de continuer la recherche auprès d'étudiantes et d'étudiants plus avancés dans leur programme.

L'étude préliminaire nous a également permis de constater certains défauts de notre instrument. La difficulté principale, relativement à notre but, est que plusieurs des étudiantes et des étudiants interrogés ont associé le mot 'infini' à des concepts physiques ou philosophiques débordant du contexte mathématique qui nous intéresse, même si le questionnaire était administré à l'intérieur d'un cours de mathématiques. Ainsi, certaines personnes ont identifié l'infini à l'univers. Cette interprétation les a amenées tantôt à accepter l'énoncé 3 (parce que les nombres font partie de l'univers), tantôt à le rejeter (parce que l'univers c'est plus que les nombres).

Pour d'autres, l'infini était quelque chose d'indéterminé, sans nécessairement être *un nombre* indéterminé: une partie de ces personnes s'est dite en désaccord avec l'énoncé 4, parce que, pour elles, l'infini n'était pas un nombre, alors qu'une autre partie s'est montrée quand même d'accord avec celui-ci. Enfin, concernant l'énoncé 6, aussi bien parmi les personnes en accord que parmi celles en désaccord, il s'en est trouvé qui pensaient que l'infini était quelque chose qui varie, sans pour autant le concevoir comme une variable au sens mathématique du terme. Afin d'atténuer ce genre de problèmes, nous avons bâti un nouveau questionnaire centré sur le symbole '∞' plutôt que sur le mot 'infini', car il nous semble que le premier soit associé aux mathématiques de façon plus particulière. [6]

Ensuite, nous avons observé que pour certaines personnes l'infini représentait bien un ensemble de nombres, mais pas nécessairement l'ensemble de *tous* les nombres. Nous avons alors choisi d'adopter cette idée, plus générale, comme objet d'étude. De plus, de nombreux étudiants et étudiantes ne faisaient pas une distinction nette entre un ensemble de nombres et un nombre indéterminé. Nous avons donc retenu pour le nouveau questionnaire une idée unique, à savoir que l'infini peut représenter plusieurs nombres.

Enfin, certaines remarques que nous avons recueillies suggèrent l'existence d'un lien entre '+∞' et les nombres positifs, d'une part, et entre '-∞' et les nombres négatifs, d'autre part. Ainsi, à la question 'Qu'est-ce que l'infini signifie pour vous?', une personne inscrite à la première année du baccalauréat en mathématiques a répondu: "Tous les nombres réels positifs si +∞, négatifs si -∞" (D11). Ce genre d'association s'est retrouvé également dans certains propos des élèves de douzième année que nous avons interviewés. Afin de suivre cette piste, nous avons introduit de nouvelles questions concernant '+∞' et '-∞'.

L'instrument

Le questionnaire révisé débutait par la question 'Selon vous, le symbole ∞ peut-il représenter un ou plusieurs nombre(s)?' Cette question était assortie de trois choix de réponse: 'Oui', 'Non' et 'Je ne sais pas'. Le dernier choix a été introduit afin de minimiser la possibilité de réponses données au hasard. Les personnes qui répondaient par l'affirmative étaient invitées à préciser de quel(s) nombre(s) il s'agissait et, si elles pensaient que le symbole '∞' pouvait représenter *plusieurs* nombres, à expliquer le sens qu'elles donnaient à cette affirmation. Elles devaient également dire si, à leur avis, ce symbole pouvait représenter autre chose qu'un ou des nombres. Aux personnes qui répondaient 'non' à la première question, nous demandions ce que ce symbole représentait pour elles. Le but des deux dernières sous-questions n'était pas d'observer les idées sur l'infini en général (notre objectif demeurant circonscrit à l'étude d'un type d'idée en particulier), mais de confirmer et de clarifier les réponses données à la première question.

Le questionnaire se terminait par les trois questions suivantes: 'Selon vous, que représente le symbole +∞?', 'Selon vous, que représente le symbole -∞?' et 'Dans quels contextes mathématiques avez-vous déjà rencontré les symboles ∞, +∞ et -∞?'

Les sujets

Le questionnaire a été administré à deux groupes d'étudiantes et d'étudiants dans des cours de didactique des mathématiques. Le premier groupe comprenait 47 personnes inscrites à la deuxième année du baccalauréat en enseignement préscolaire et primaire. Ces étudiantes et étudiants avaient suivi, dans la première année de leur programme d'études, deux cours obligatoires de mathématiques de 45 heures chacun. Le second groupe était constitué de 40 personnes inscrites à la deuxième ou à la troisième année du baccalauréat en enseignement secondaire, se préparant soit à l'enseignement des mathématiques uniquement, soit à celui des mathématiques et d'une autre matière (physique, chimie ou informatique). [7] Au moment où elles ont répondu au questionnaire, ces personnes avaient déjà suivi au moins quatre cours de mathématiques dans le cadre de leur programme.

Dans la suite du présent article, les membres du premier groupe seront identifiés par les sigles P1, P2... P47 et ceux du second groupe, par les sigles S1, S2... S40. Pour l'interprétation des résultats, nous ferons appel aussi à une partie du matériel recueilli au cours de l'étude préliminaire. En ce qui concerne les sigles servant à désigner les personnes qui ont participé à cette étude, la lettre initiale A signifie que ce sont de futurs enseignants et enseignantes du primaire, la lettre B, que ce sont de futurs enseignants et enseignantes du secondaire, tandis que les lettres C et D correspondent à deux cohortes d'étudiantes et d'étudiants se spécialisant en mathématiques. Le tableau 1 présente l'ensemble des groupes qui ont participé à la recherche et les sigles employés pour désigner leurs membres.

TABLEAU 1

Groupes ayant participé à la recherche

Étude préliminaire (étudiantes et étudiants de 1ère année)

Programme d'études	*N*	*Sigles*
Enseignement préscolaire et primaire	168	A1, A2 . A168
Enseignement secondaire	18	B1, B2 . B18
Mathématiques (1ère cohorte)	43	C1, C2 . C43
Mathématiques (2e cohorte)	33	D1, D2 . D33

Étude principale (étudiantes et étudiants de 2e et 3e années)

Programme d études	*N*	*Sigles*
Enseignement préscolaire et primaire	47	P1, P2 P47
Enseignement secondaire	40	S1, S2 S40

Les symboles '∞', '+∞' et '-∞' peuvent-ils représenter plusieurs nombres?

Le symbole '∞'

Parmi les 87 personnes interrogées, 37 ont adhéré à l'idée que le symbole '∞' peut représenter plusieurs nombres: 28 (60%) parmi les étudiantes et les étudiants se destinant à l'enseignement primaire et 9 (23%) parmi celles et ceux qui se destinent à l'enseignement secondaire. Voyons quel sens ces personnes ont donné à une telle affirmation, d'après les explications qu'elles ont fournies. Neuf personnes ont employé explicitement l'expression 'tous les nombres' ou 'tous les nombres qui existent' Quelques-unes d'entre elles ont précisé:

- Tous les nombres qui existent: les N, Z, Q, etc. (P20)
- ∞ représente tous les nombres imaginables ou inimaginables auxquels on peut se référer Des plus gros aux plus petits (P22)
- Je me représente toujours une droite numérique et '∞' est utilisé pour tous les nombres en haut et en bas de 0 Donc, cela signifie autant les réels, les rationnels, les irrationnels, les radicaux, etc. (P11)

Pour la plupart des 37 étudiantes et étudiants pour qui le symbole '∞' pouvait représenter plusieurs nombres, il s'agissait d'un ensemble infini de nombres (éventuellement de tous les nombres) ou d'une suite de nombres, en particulier de l'ensemble ou de la suite de tous les nombres qui suivent ou qui précèdent un nombre donné. Voici quelques exemples typiques de leurs propos:

- Ce peut être les nombres rationnels (3/4, 5/8, 2/13...), les nombres (0, 1, 2, 3...) [.] on ne peut tous les écrire, alors on les représente par ∞ (P1)
- Rationnels, irrationnels, entiers relatifs. (P24)
- Une suite de nombres respectant une règle prédéterminée qui ne s'arrête jamais. (S6)
- Si je dis que c'est de 10 à ∞, j'aurai tous les nombres qui suivent 10. (P8)
- -∞ 2 3 4 5 6 ∞ les nombres avant '2', donc: 1, 0, -1, -2, -3, etc. et les nombres après '6', donc: 7, 8, 9, 10, etc. (P9)
- Le symbole ∞ représente tous les nombres qui viennent après le nombre où l'on s'arrête. (P15)
- Tous les nombres qui suivent un certain nombre et ce tant pour l'ensemble R que pour l'ensemble Q. (P22)

Les cinq derniers exemples (et il y en a d'autres du même genre) montrent que pour certaines personnes le symbole '∞' *peut* représenter tous les nombres, mais qu'il ne les représente pas toujours tous, car sa signification varie d'un contexte à l'autre Ce point de vue est évident dans le texte suivant:

- Ce symbole veut dire infini, donc il représente tous les nombres. Ex. {1, 2, ∞ veut dire 3 jusqu'à l'infini. (P14)

Cette vision a été formulée de façon particulièrement claire durant l'étude préliminaire par une personne voulant expliquer son désaccord avec la proposition 'L'infini est une variable':

- L'infini n'est pas *une* variable, mais il est variable puisque l'on peut écrire aussi bien [8, +∞ que [30, +∞, on a donc retiré de l'infini [9, 30). (D11)

Citons enfin quelques commentaires reflétant des opinions plus rares dans le présent échantillon, mais que nous avions déjà observées chez les élèves de douzième année ou chez les étudiantes et les étudiants ayant participé à l'étude préliminaire:

- Il s'agit de l'ensemble des nombres très grands ou très petits. (S4)
- L'infini peut représenter plusieurs nombres très grands positifs ou négatifs (S8)
- Le symbole ∞ représente l'infini. Il représente donc plusieurs nombres Il peut représenter l'infini positif ou négatif. (P4)
- Ce ne sont pas des nombres précis. (S5)
- Il représente un ensemble de nombres non défini. (S17)
- Il peut vouloir dire une infinité de réponses. (P23)

Les symboles '+∞' et '-∞'

En répondant aux questions sur les symboles '+∞' et '-∞', 26 (55%) des étudiantes et des étudiants se destinant à l'enseignement primaire et 12 (30%) de celles et ceux qui se destinent à l'enseignement secondaire ont exprimé l'opinion que chacun de ces deux symboles désigne un ensemble de nombres. Dans la grande majorité des cas, il s'agit de l'ensemble des nombres positifs pour '+∞' et des nombres négatifs pour '-∞':

- [+∞] les nombres positifs, ceux vers la droite. [-∞] les nombres négatifs, ceux vers la gauche (P1)
- [+∞] toutes les représentations numériques plus grandes que 0 (ex. 0,0 001 ou 1000...000... +1, +1, ...).

[-∞] toutes les représentations numériques plus petites que 0 (ex. -0,0.....001 ou -100.....000 .. +1, ...) (S33)

- [+∞] tous les nombres de nature positive, à partir de 0 (non inclus) jusqu'à +∞ consécutivement. [-∞] tous les nombres de nature négative, à partir de 0 (non inclus) jusqu'à -∞ consécutivement. (S39)

Parfois il s'agit d'un sous-ensemble des nombres positifs ou négatifs. Trois personnes se sont explicitement limitées aux nombres entiers. Par exemple:

- [+∞] la suite des nombres naturels. [-∞] la suite des entiers plus petits que zéro. (S6)

De leur côté, sept personnes ont fait référence à des nombres, positifs ou négatifs, 'très grands', voire 'infinis' et même 'non définis'. En voici deux exemples:

- [+∞] les plus grands nombres positifs. [-∞] les plus grands nombres négatifs (les plus petits nombres) (S1)
- [+∞] les nombres positifs infinis. [-∞] les nombres négatifs infinis. (P41)

Enfin, plusieurs étudiantes et étudiants se destinant à l'enseignement primaire ont repris l'idée, déjà manifestée au sujet du symbole '∞', d'un ensemble ou d'une suite de nombres qui suivent ou précèdent un nombre donné:

- [+∞] tous les nombres positifs qui viennent après un certain nombre.

  [-∞] tous les nombres négatifs qui viennent avant un certain nombre. (P9)
- [+∞] les nombres qui sont à la suite d'un nombre donné. Exemple: 8 à +∞ c'est donc les nombres de 8 à l'infini (donc 9, 10, 11, 12 ... et ce sans fin). [-∞] les nombres qui sont avant un nombre donné. Exemple: -∞ à 8 c'est donc les nombres de l'infini à 8 (donc infini, ... -3, -2, -1, ... à 8) (P26)

Dans ce cas, l'ensemble représenté par '+∞' peut comprendre des nombres négatifs et, à l'inverse, celui désigné par '-∞' peut comporter des nombres positifs.

La familiarité avec les symboles '∞', '+∞' et '-∞'

A la question 'Dans quels contextes mathématiques avez-vous déjà rencontré les symboles ∞, +∞ et -∞?', nous avons obtenu une variété de réponses. Nous rapportons ici celles qui sont revenues le plus souvent:

- 6 personnes se destinant à l'enseignement primaire et 26 à l'enseignement secondaire ont mentionné le contexte du calcul différentiel et intégral (limites, dérivées ou intégrales);
- 6 personnes du premier groupe et 10 du second ont évoqué l'étude des fonctions ou des coniques (domaines, images, graphiques);
- 6 personnes du premier groupe et 10 du second ont nommé les suites, les énumérations ou les séries de nombres;
- 5 personnes du premier groupe et 12 du second ont mentionné les intervalles de nombres et ont donné les exemples suivants:

  ]2, ∞+ [0, ∞+ [0, +∞] [0, ∞]]-∞, 0] [-∞, -2]-∞, +∞[[1, +∞ ∪ [-3, -∞
- 12 personnes du premier groupe et 1 du second ont cité la droite numérique;
- 6 personnes du premier groupe et 1 du second ont parlé d'ensembles de nombres, en donnant comme exemples N, Z, Q ou R;
- enfin, 8 personnes du premier groupe et 1 du second n'ont donné aucune réponse, ou ont affirmé ne pas s'en souvenir.

D'où vient l'idée que l'infini est un ensemble de nombres?

A l'instar des élèves du collégial rencontrés par Louise Maurice, une partie des futurs enseignants et enseignantes interrogés pense que l'infini est un ensemble de nombres. Plus précisément, environ la moitié des personnes se destinant à l'enseignement primaire et le quart de celles qui se destinent à l'enseignement secondaire croient que les symboles '∞', '+∞' et '-∞' désignent des ensembles de nombres. La différence entre ces deux populations n'est pas surprenante, car les candidates et les candidats à l'enseignement secondaire ont suivi, avant et pendant leurs études universitaires, plus de cours de mathématiques que leurs collègues se préparant à enseigner au primaire. Ce qui nous apparaît remarquable est que la perception de l'infini comme un ensemble de nombres soit aussi fréquente chez de futurs enseignants et enseignantes rendus à leur deuxième année de formation universitaire.

Nous ne prétendons aucunement que cette idée résume la totalité de la conception de l'infini chez les personnes qui l'ont exprimée et nous ne nous prononçons pas sur le degré de conviction avec lequel elles y adhèrent, mais nous croyons avoir montré qu'elle fait partie de leur 'concept image' de l'infini. D'où vient cette idée? Comment a-t-elle pu se former et s'enraciner? Nous proposons ici quelques éléments susceptibles d'éclairer ces questions. [8] Pour cela, nous ferons appel à l'ensemble des commentaires formulés par les participantes et les participants à l'une ou l'autre des étapes de notre recherche.

Tout d'abord, soulignons qu'au secondaire on se sert de la notion d'infini à peu près uniquement pour désigner des intervalles, dans le contexte de l'étude des inéquations ou des fonctions. Il est possible que des élèves à qui on a expliqué, par exemple, que ']2, +∞' signifie 'tous les nombres supérieurs à 2' présument que le signe '+∞' à lui seul représente aussi tous ces nombres.

Le questionnaire que nous avons utilisé, centré comme il l'était sur les signes '∞', '+∞' et '-∞' plutôt que sur le mot 'infini', mettait justement en lumière le rôle de la notation dans l'origine de ce type de méprise. Plusieurs des commentaires rapportés dans la section des résultats illustrent comment, lorsqu'un des signes '∞' ou '+∞' apparaît après quelques termes d'une suite de nombres, il peut être interprété comme signifiant 'etc.', c'est-à-dire, littéralement, tous les autres termes de la suite ("on ne peut tous les écrire, alors on les représente par ∞" (P1)). De façon analogue, lorsque les signes '+∞' et '-∞' sont placés aux deux extrémités d'un segment, ils peuvent être compris comme représentant tous les points de la droite qui ne sont pas dessinés, donc comme remplaçant chacun une demi-droite. Dans les deux cas, cette lecture erronée des symboles ne produira probablement pas de malentendus concernant la suite ou la droite, ce qui permettra à la mauvaise interprétation des symboles de s'installer.

Avec la notation, le langage peut aussi contribuer à la formation de la croyance que l'infini est un ensemble de nombres. Il est facile, par exemple, de confondre les adjectifs 'infini' et 'indéfini' et de glisser ainsi de 'nombre infini' à 'nombre indéfini', à 'n'importe quel nombre'. Une autre source de confusion pourrait être la ressemblance morphologique entre les phrases 'l'infini est l'ensemble de tous les nombres' et 'l'ensemble de tous les nombres est infini'. En effet, dans notre enquête une personne qui pensait que le symbole '∞' peut représenter 'tous les nombres' a expliqué cela en écrivant que "les nombres naturels sont dénombrables et il en existe une infinité" (S7). Dans la même veine, au cours de l'étude préliminaire, deux personnes ont explicité ainsi leur accord avec l'énoncé 'L'infini représente l'ensemble de tous les nombres': "vrai car l'ensemble de tous les nombres est infini" (A75) et "l'infini est le cardinal de l'ensemble de tous les nombres" (D12)

La dernière remarque citée suggère une confusion entre le cardinal de l'ensemble de tous les nombres et l'ensemble lui-même. Une confusion analogue peut s'observer parfois entre zéro (le cardinal de l'ensemble vide) et l'ensemble vide lui-même: zéro devient alors 'rien', [9], 'aucun objet' ou 'aucun nombre', comme l'ont affirmé certains des élèves de douzième année que nous avons interviewés. Cette vision du zéro et la vision de l'infini discutée dans le présent article sont en quelque sorte complémentaires: à côté d'un zéro qui n'est 'rien' ou 'aucun nombre', l'infini est 'tout' ou 'tous les nombres'. Bien que ces idées soient toutes deux incorrectes, celle qui concerne le zéro peut être moins déconcertante que celle touchant l'infini et peut faire l'objet d'une certaine tolérance, dans le sens que les enseignantes et les enseignants ne s'empressent peut-être pas toujours de la corriger quand elle se manifeste chez leurs élèves. Si l'idée que l'infini est tout (ou tous les nombres) est associée à l'idée que zéro n'est rien [10], la tolérance relative dont jouit la seconde idée peut contribuer au maintien de la première également, d'autant plus que celle-ci a rarement l'occasion d'être exprimée et donc d'être critiquée en classe

L'emploi du mot 'infini' en dehors du contexte mathématique peut aussi être à l'origine du phénomène que nous étudions. Nous avons déjà fait allusion aux personnes qui, durant l'étude préliminaire, se sont appuyées sur l'interprétation de l'infini comme 'tout' (l'univers) pour expliquer leur accord avec l'affirmation que 'l'infini représente l'ensemble de tous les nombres'. Elles ont écrit, par exemple: "entre autres!" (A163), "mais encore plus ... " (A140), "l'infini représente tout" (C14), "il peut comprendre tout" (B4), "il contient tout" (A36), "c'est ce qui englobe tout" (C11).

Un autre sens courant du mot 'infini' est celui d'un nombre, peut-être bien fini, mais très grand et difficilement calculable, tel le nombre des étoiles ou celui des grains de sable. En ce sens, l'infini devient effectivement un nombre indéterminé, variable d'une situation à l'autre et pouvant assumer une infinité de valeurs. Nous avons observé plusieurs traces de cette interprétation. Par exemple, parmi les élèves de douzième année, François a expliqué pourquoi il croyait que l'infini représentait n'importe quel nombre en prenant "un exemple sur le corps humain": "j'ai un infini de cellules, toi tu en as un infini, mais pas le même nombre, donc [l'infini] c'est n'importe quel nombre" Les remarques suivantes, recueillies au cours de l'étude préliminaire, expriment un point de vue semblable:

- L'infini peut varier dépendamment du milieu étudié (C13)
- Il change tout dépendant de l'environnement où il est employé (B4)
- Il est relatif [...] [il] dépend des limites de l'observateur ou du chercheur (C30)
- Il varie selon la perception de chacun des individus. (B3)
- Il peut varier d'une personne à l'autre. (A123)
- L'infini varie d'une situation à une autre [...] ce qui paraît inatteignable pour quelqu'un ne l'est pas nécessairement pour l'autre. (D27)
- Parfois on parle de l'infini comme valeur plus grande que 10 000 ou d'autres fois on peut la considérer seulement si plus grande que 1 000 000. (D15)
- La valeur (grande ou petite) du nombre infini varie selon les objets auxquels on l'associe. Par exemple, l'infini en termes de statistique n'est pas toujours élevé [...] on peut chiffrer l'infini à 350 répondants, chiffre plus petit que bien d'autres. [...] L'infini est une quantité physique ou mathématique que l'on détermine selon chaque situation [...] On dit qu'à partir de tant on considère avoir atteint l'infini. [...] [C'est] une quantité à partir de laquelle les calculs ne sont plus influencés par l'accroissement du nombre. (B1)

Enfin, la dernière explication que nous proposons vient de l'interprétation de l'infini comme un processus sans arrêt, notamment le processus du comptage ou celui du balayage de la droite numérique suggéré par l'expression '$x \rightarrow \infty$'. C'est peut-être à cause de ces images que certaines des personnes interrogées pendant l'étude préliminaire en sont arrivées à penser que l'infini représente l'ensemble de tous les nombres, parce que, pour l'atteindre, il faut passer à travers tous les nombres

Voici deux exemples de ce type de raisonnement: "étant donné que [l'infini] vient supposément à la suite de tous les nombres, il doit donc regrouper tous les nombres" (A29), "en partant d'un point en allant à l'infini, on englobe tout le reste des nombres connus et inconnus" (C13). La même interprétation de l'infini comme un processus a amené d'autres participantes et participants à l'étude préliminaire à concevoir l'infini comme un nombre indéterminé, car éternellement en mouvement: "L'infini est une valeur [qu'il] est impossible d'atteindre parce qu'elle demeure toujours en mouvement" (D29), "l'infini signifie pour moi quelque chose qui n'arrête jamais et donc on ne pourra jamais savoir c'est quoi" (C34)

Nous avons présenté une liste, non exhaustive, d'éléments pouvant favoriser la naissance de l'idée que l'infini est un ensemble de nombres ou n'importe quel nombre. Il reste à comprendre comment ce genre d'idée peut persister jusqu'en deuxième année de formation universitaire.

L'infini est au coeur des mathématiques et il fait partie de ce qui distinguent celles-ci des autres sciences. De façon implicite, les jeunes rencontrent ce concept dès leurs premiers apprentissages: le comptage, la droite et, un peu plus tard, l'infinité des points d'un segment ou la densité des nombres rationnels. Pourtant, que ce soit au primaire, au secondaire, au collégial ou même dans plusieurs cours universitaires, l'infini fait rarement l'objet d'un enseignement explicite. On s'en sert pour indiquer la nature illimitée d'une droite ou d'une demi-droite, le cardinal d'un ensemble infini ou le caractère potentiellement infini d'un processus (le comptage ou les limites). La plupart du temps, on n'utilise que l'infini potentiel, sans besoin de définir un objet qui serait l'infini actuel. Toutefois, la notation et le langage employés (à l'intérieur ou à l'extérieur des mathématiques) poussent les élèves à se construire un tel concept de l'infini. Par la suite, les élèves seront rarement aux prises avec des situations susceptibles de déstabiliser une construction erronée et, faute de discussions en classe sur l'infini, celle-ci passera facilement inaperçue.

De plus, si, comme l'indiquent nos résultats, des idées incorrectes sur l'infini subsistent encore chez des étudiantes et des étudiants de deuxième année d'un programme d'études universitaires menant à l'enseignement, il est possible qu'elles se retrouvent également chez des enseignantes et des enseignants en exercice, ce qui contribuerait à créer une boucle traversant l'ensemble du système scolaire.

Remerciements

Nous remercions toutes les personnes qui ont accepté de nous rencontrer ou de répondre à l'un ou l'autre de nos questionnaires. Nous remercions également nos collègues qui ont accepté d'administrer nos questionnaires à l'intérieur de leurs cours de mathématiques ou de didactique des mathématiques. Sans leur participation, notre recherche n'aurait pu se faire. Nous tenons à exprimer notre plus vive reconnaissance à Charles Cassidy pour sa collaboration tout au long de la conception et de la réalisation de la recherche, ainsi que pour ses commentaires sur des versions provisoires du présent article. Bien entendu, cela ne signifie pas qu'il partage nos opinions. Un dernier merci à Jean Dionne qui a bien voulu lire et commenter le manuscrit et à Hélène Dumais qui en a fait la révision linguistique.

Notes

[1] La recherche en question s'inscrit dans les études universitaires de troisième cycle que mène actuellement Louise Maurice.

[2] Le concept d'infini n appartient pas uniquement aux mathématiques. On s'en sert aussi, par exemple, dans des contextes philosophiques ou religieux. Pour un aperçu de l'évolution de ce concept dans divers domaines, voir Maurice (1996).

[3] Nous employons des pseudonymes afin de préserver l'anonymat des élèves.

[4] Il est bien connu que nos structures mentales peuvent abriter simultanément des idées contradictoires sur un sujet donné. Voir, par exemple, Tall (1991, p. 7).

[5] Nous avons relevé des propos pouvant être interprétés en ce sens dans une entrevue réalisée par Lajoie (1994) auprès de deux étudiantes inscrites au baccalauréat en enseignement préscolaire et primaire. L'entrevue portait sur la division par zéro. Lorsque les étudiantes ont tenté d'effectuer la division $7 \div 0$ par soustraction répétée, elles se sont aperçues qu'il leur faudrait soustraire zéro de sept 'une infinité de fois'. L'une d'entre elles s'est demandé alors: "Qu'est-ce qui peut symboliser l'infinité de fois?" Après une brève discussion, au cours de laquelle ni elle ni sa compagne n'ont évoqué la possibilité d'employer le signe '∞', elle a conclu: "C'est zéro. La seule affaire qui peut nous permettre de chiffrer une infinité ça va être le zéro. On [ne] mettra pas un million trois cent cinquante trois mille là!" [Rires]

[6] Notre intuition a été confirmée par la remarque suivante formulée par une étudiante que nous avons interviewée après qu'elle eut répondu au questionnaire: "Le symbole m'amène aux mathématiques et le mot m'amène à la physique. [...] Le mot et le symbole [ne] m'amènent pas à la même perception de [l'infini]" (D30).

[7] L'hétérogénéité relative du second groupe est due à une réforme intervenue dans le programme de baccalauréat en enseignement secondaire.

[8] Certains de ces éléments seront traités plus en détail dans la thèse de doctorat de Louise Maurice.

[9] Cette conception du zéro est bien connue. Voir, par exemple, Wheeler et Feghali (1983).

[10] L'association entre '0' et '∞' peut se faire intuitivement (l'infiniment petit et l'infiniment grand) ou par l'entremise de la fonction $y = 1/x$. En voici deux exemples que nous avons observés, au cours de l'étude préliminaire, dans les réponses obtenues à la question 'Qu'est-ce que l'infini signifie pour vous?': "L'inverse du 0" (C7) et "L'infini est un chiffre plus grand que je ne peux l'imaginer qui se situe à l'opposé de zéro sur une sphère qui est d'une grosseur indéterminée" (C23). Louise Maurice (1996) donne des exemples de cette association entre le zéro et l'infini tirés d'une variété d'époques et de civilisations.

Références

Duval, R. (1983) 'L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques', *Educational Studies in Mathematics*, **14**(4), 385-414.

Fischbein, E., Tirosh, D. and Hess, P. (1979) 'The intuition of infinity', *Educational Studies in Mathematics* **10**(1), 3-40.

Lajoie, C. (1994) 'Analyse critique d'une entrevue', Travail présenté à L. Guilbert dans le cadre du cours 'Introduction à l'analyse qualitative', Québec, QC, Département de didactique, Université Laval.

Martin, W. G. and Wheeler, M. M. (1987) 'Infinity concepts among preservice elementary school teachers', *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Montréal, QC, pp. 362-368.

Maurice, L. (1996) 'Une genèse de l'idée d'infini', *Bulletin AMQ (Association Mathématique du Québec)* **36**(4), 10-20.

Moreno, L. E. and Waldegg, G. (1991) 'The conceptual evolution of actual mathematical infinity', *Educational Studies in Mathematics* **22**(3), 211-231.

Tall, D. (1980) 'The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity', *Educational Studies in Mathematics* **11**(3), 271-284.

Tall, D. (ed.) (1991) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1992) 'The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof', in Grouws, D. A. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, NY, Macmillan, pp. 495-511.

Tall, D. and Vinner, S. (1981) 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics* **12**(2), 151-169.

Wheeler, M. M. and Feghali, I. (1983) 'Much ado about nothing: preservice elementary school teachers' concept of zero', *Journal for Research in Mathematics Education* **14**(3), 147-155.

Wheeler, M. M. and Martin, W. G. (1988) 'Explicit knowledge of infinity', *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of PME-NA*, DeKalb, IL, pp. 312-318.