LA RÉIFICATION COMME NAISSANCE D'UNE MÉTAPHORE[1]

ANNA SFARD

> Basically, I'm not interested in doing research and I never have been. I'm interested in *understanding,* which is quite a different thing. [2] — David Blackwell, en référence à son travail de mathématicien (Albers & Alexanderson, 1985, p. 19)

Introduction : l'expérience insaisissable de la compréhension

L'expérience de la compréhension est doublement insaisissable : elle est difficile à atteindre et à maintenir, mais elle est encore plus difficile à saisir et à expliquer. Je me souviens d'un événement qui, pour la première fois, m'a fait prendre conscience de mon incompréhension à ce sujet. Je débutais comme enseignante et, à ma grande surprise, j'ai réalisé que certains de mes étudiants, qui maîtrisaient bien les systèmes d'équations linéaires, étaient parfois incapables de répondre à des questions comme « pour quelle valeur d'un paramètre *q* le système d'équations linéaires n'admet pas de solution ? » J'ai abordé cette difficulté avec désinvolture, en croyant qu'il serait possible de pallier au problème en quelques heures. Toutefois, ça n'a pas été le cas. Il a fallu des jours avant que le groupe puisse faire face aux paramètres et, même une fois rendus là, ce n'était pas exactement ce que j'avais espéré : à l'examen final, un seul élève a réussi à produire des solutions satisfaisantes pour l'ensemble des problèmes que j'avais posés. Lors d'une conversation privée avec lui, je lui ai fait ce commentaire : « On dirait bien que tu es le seul de la classe à vraiment avoir compris le sujet. » À mon grand désarroi, cet éloge a été accueilli assez négativement : « C'est faux ! Je n'ai rien compris du tout. J'ai fait ce que j'ai fait, mais je ne sais pas pourquoi ça a marché. » J'ai alors essayé de lui prouver qu'il avait tort. Je lui ai présenté plusieurs autres problèmes, l'un assez différent de l'autre, qu'il a tous résolus sans difficulté visible. J'ai expliqué que ce type de problèmes ne pouvait tout simplement pas être résolu par l'application mécanique d'un algorithme. Il a continué à insister en disant qu'il « ne comprenait rien ». Nous étions frustrés et perplexes. Il sentait qu'il ne comprenait pas les paramètres et je sentais que je ne comprenais pas la compréhension.

D'une certaine façon, les réflexions sur ma propre expérience m'ont aidée. Je me suis souvenue de mon expérience comme étudiante de troisième cycle en mathématiques qui réussissait sans difficulté ses examens, mais qui sentait souvent que la facilité avec laquelle elle faisait les choses n'était pas suffisante à lui donner le sentiment d'une vraie compréhension. Plus tard, j'ai été heureuse de découvrir que même des mathématiciens renommés n'étaient pas étrangers à ce type d'expériences. Dans son « automatography » Paul Halmos (1985) explique :

> I was a student, sometimes pretty good and sometimes less good. Symbols didn't bother me, I could juggle them quite well [but] I was stumped by the infinitesimal subtlety of epsilontic analysis. I could read analytic proofs, remember them if I made an effort, and reproduce them, sort of, but I didn't really know what was going on. [3] (p. 47)

Halmos a eu la chance de découvrir éventuellement ce qu'était la « vraie compréhension » (Albers & Alexanderson, 1985, p. 123) :

> One afternoon something happened. I remember standing at the blackboard in Room 213 of the mathematics building talking with Warren Ambrose and suddenly I understood epsilons. I understood what limits were, and all of the stuff that people had been drilling in me became clear. I sat down that afternoon with the calculus textbook by Granville, Smith, and Longley. All of that stuff that previously had not made any sense became obvious [4]

Clairement ce que les gens appellent la « vraie » compréhension doit impliquer quelque chose qui va au-delà d'une capacité opérationnelle à résoudre des problèmes et à prouver des théorèmes. Toutefois, bien qu'une personne puisse n'avoir aucune difficulté à diagnostiquer le degré de sa propre compréhension, elle ne trouve pas aussi facile de nommer les critères selon lesquels cette évaluation est faite. De nombreux travaux ont été menés sur la compréhension de la compréhension (pour une étude complète et judicieuse de ces ouvrages, voir Sierpinska, 1993). Dans cet article, j'essaierai de faire un pas de plus vers la capture de cette chose impalpable qui nous donne le sentiment d'avoir saisi l'essence d'un concept, d'une relation ou d'une preuve.

Je commence par quelques mots sur la manière dont j'ai abordé la question. Ma quête d'une meilleure compréhension de la compréhension mathématique est allée dans deux directions. D'abord, j'ai voulu savoir ce que les penseurs contemporains avaient à dire sur le sujet. J'ai rapidement découvert qu'en ce qui concerne la question de la compréhension, les récents développements en psychologie des mathématiques sont alignés avec certaines des avancées récentes et significatives en linguistique et en philosophie. L'applicabilité de ces dernières dans le domaine de l'éducation mathématique a déjà été notée par certains chercheurs (par exemple Dörfler, 1991; Presmeg, 1992). Dans cet

Traduction autorisée de Sfard, A. (1994) Reification as the Birth of Metaphor.
For the Learning of Mathematics **14**, 1.

article, je montre comment l'idée de réification — concept au centre du cadre conceptuel sur lequel je travaille depuis maintenant longtemps — va de pair avec les nouvelles théories générales de la compréhension. Je souhaite ainsi montrer que la théorie de la réification est alignée avec les derniers développements philosophiques et linguistiques et qu'il y a beaucoup à gagner à resserrer les liens entre ces différents domaines. Ce mariage d'idées sera le thème central de la section suivante.

Ensuite, ma démarche a été d'approcher des personnes qui — je croyais — pourraient me donner des informations de première main sur l'expérience de la compréhension en mathématiques. Je me suis tournée vers des mathématiciens en recherche. En prenant cette décision, j'étais consciente de certains pièges. Je savais d'abord que ce que je trouverais chez les mathématiciens ne serait pas nécessairement vrai d'un point de vue général. Cependant, quelle que soit la différence réelle entre les « experts » et les « non-experts », j'étais convaincue que les réflexions des mathématiciens sur leur propre pensée avaient le potentiel de générer des idées qui allaient porter au-delà de la compréhension « professionnelle ». Une autre difficulté était liée à la méthode choisie pour collecter les données. L'introspection, intrinsèquement subjective, n'est pas nécessairement le meilleur moyen d'obtenir des informations fiables. Cependant, étant donné que je m'intéressais aux sensations internes liées au processus de compréhension plutôt qu'à des comportements visibles, je ne voyais pas de meilleur moyen d'enquêter sur les compétences méta-cognitives de mes interlocuteurs.

Ce que dit la théorie non-objectiviste sur le sens

Aussi unique que soit la compréhension mathématique, la question de la compréhension ne se limite certainement pas aux mathématiques. Il serait ainsi mal avisé de traiter des particularités du cas spécifique sans se référer d'abord aux théories générales existantes sur le sens, champ qui se développe assez rapidement. Le fait que je parle « sens » et non de « compréhension » n'est pas anodin. Comme je vais essayer de l'expliquer, les raisons pour lesquelles j'insiste sur le sens vont bien au-delà du lien évident entre sens et compréhension. C'est l'approche relativement nouvelle de la pensée, de l'imagination et de la compréhension humaines promue par des auteurs tels que Lakoff (1987) et Johnson (1987) qui m'oblige à traiter la question de la compréhension comme presque équivalente à la question du sens.

Cette dernière affirmation sur le sens et la compréhension apparaît comme un consensus vieux de plusieurs siècles, mais soulève en fait plusieurs débats chez les philosophes et linguistes que Johnson nomme « Objectivistes ». Ici, Objectivisme réfère aux écoles et théories qui, implicitement ou explicitement, soutiennent que le sens est principalement une caractéristique des signes et des concepts, qu'il s'agit d'une sorte de « charge » déterminée à l'extérieur et qui est transportée par des symboles et des phrases. Cette idée s'est avérée suffisamment puissante pour donner naissance à un paradigme global — un paradigme si large que presque toutes les écoles de pensée passées et récentes se retrouvent dans ses limites.

Les principes de base de la perspective Objectiviste peuvent être résumés en quelques lignes. Selon le compte rendu critique de Johnson, l'Objectivisme est fondé sur l'idée que le sens est « désincarné » : il est reçu par un esprit humain plutôt que façonné par lui. Ainsi, la compréhension est conçue comme « la saisie du sens » et est un processus qui sert d'intermédiaire entre un esprit individuel et un domaine universel, absolu et anhistorique de faits et d'idées. En d'autres mots, la compréhension consiste à construire des liens entre les symboles et une certaine réalité indépendante de l'esprit. L'Objectivisme présuppose que toute connaissance est de nature propositionnelle, c'est-à-dire qu'elle est « conceptually and propositionally expressible in literal terms that can correspond to objective aspects of reality »[5] (Johnson, 1987, p. 5). Enfin, le paradigme Objectiviste est intimement lié à la *vision représentationnelle de l'esprit* (Putnam, 1988) selon laquelle « to know is to represent accurately (in one's head) what is outside the mind » [6] (Rorty, 1979, p. 3).

Même si elles ne sont pas toujours explicitement énoncées, les croyances au cœur de l'Objectivisme sous-tendent presque toutes les théories classiques du sens et de la compréhension, et ce, quels que soient leurs fondements philosophiques. Même l'intentionnalité qui prend racine dans les travaux de Kant, Husserl et Frege et son élaboration actuelle dans les écrits de Searle (1983), est considérée par Johnson comme n'étant pas entièrement exempte de « penchants Objectivistes ». L'Objectivisme ne doit toutefois pas être confondu avec le réalisme tout comme l'anti-Objectivisme ne doit pas être compris comme un refus de l'existence d'une réalité objective. L'Objectivisme, tel que conçu par Johnson, aborde la question de la compréhension humaine du monde plutôt que la question de l'existence ou de la nature de ce monde.

Le paradigme Objectiviste fait l'objet de critiques croissantes depuis plusieurs décennies et est aujourd'hui progressivement abandonné par les philosophes, les linguistes et les psychologues cognitifs. Les philosophes des sciences (Carnap, Kuhn, Feyerabend) sont possiblement les premiers à avoir questionné cette idée de « point de vue de Dieu » de la réalité. En psychologie cognitive, la dissonance évidente entre l'Objectivisme et l'approche constructiviste largement adoptée de l'apprentissage constitue une raison pressante pour une profonde révision de nos visions du sens et la compréhension. Cette tendance anti-Objectiviste se fait également sentir dans le domaine de l'éducation mathématique :

> Given that mathematics educators almost universally accept that learning is a constructive process, it is doubtful if any take a representational view literally and believe that learning is a process of immaculate perception [7] (Cobb, Yackel & Wood, 1992, p. 3)

Une façon d'aborder cette dissonance est d'inverser la version Objectiviste de la relation entre le sens et la compréhension : alors que l'Objectivisme considère la compréhension comme secondaire et dépendante des sens qui sont prédéterminés, le non-Objectivisme implique que ce sont nos compréhensions qui donnent aux signes et aux notions leurs sens particuliers. D'un côté, les Objectivistes considèrent le sens comme une question de relation entre les symboles et un monde réel, et ainsi comme totalement indépendant de l'esprit humain. L'approche non-Objectiviste suggère à l'inverse qu'il n'y a pas de sens au-delà de ces sens particuliers conférés aux symboles par nos compréhensions.

C'est ainsi que la question des sources primaires de ces compréhensions se pose. De plus, si le sens se trouve dans l'œil de celui qui regarde, est-ce une question entièrement subjective ? C'est dans la manière dont Lakoff et Johnson répondent à ces deux questions que se trouve leur contribution vraiment originale et imaginative à la théorie du sens et de la compréhension. Ils consacrent une grande partie de leurs écrits à la description détaillée d'un mécanisme bien défini qui transforme les idées les plus abstraites en concepts chargés de sens. La possibilité de sens partagés, comme s'ils étaient objectifs, découle du fait que le fonctionnement de ce mécanisme est soumis à certaines lois universelles.

Alors que la « désincarnation » du sens est le motif central de l'approche Objectiviste, Lakoff et Johnson travaillent à « remettre le corps dans l'esprit ». L'idée centrale de leur théorie est que notre expérience corporelle est la principale — en fait la seule — source de compréhension. Ici, explique Johnson, « "experience" is to be understood in a very rich, broad sense as including basic perceptual, motor-program, emotional, historical, social, and linguistic experience » [8] (Johnson, 1987, p. xvi). Le physique et l'expérimental sont même à la base des idées les plus pures et les plus sophistiquées de notre imagination. De plus, même notre raisonnement est ou peut être lié à des perceptions primaires. Un examen attentif des règles d'inférence de base révélera qu'elles prennent racine dans l'expérience physique d'être contenu (être « dans » ou « hors » d'un certain espace ou ensemble).

Cela étant dit, la question fondamentale est de savoir comment le « 'bodily' works its way up to the 'conceptual' and 'rational ' » [9] (p. xxi). Au centre de la réponse donnée par Lakoff et Johnson se trouve la métaphore. Notre système conceptuel est un produit des métaphores qui transfèrent l'expérience corporelle dans le domaine moins concret des idées. Selon la définition classique, une métaphore est une correspondance établie d'un domaine conceptuel à un autre. L'affirmation d'une projection métaphorique du perceptuel vers l'abstrait semblerait toutefois plutôt invraisemblable, car elle suggérerait qu'il existe une correspondance directe, basée sur une relation de similarité, entre les expériences physiques et les concepts abstraits. Dans la théorie de Lakoff et Johnson, cependant, le terme « métaphore » porte un sens beaucoup plus large que dans la linguistique traditionnelle : il ne s'agit pas seulement d'une forme rhétorique ou d'un gadget sémantique faisant appel à des concepts tout faits. Il s'agit d'une construction mentale qui joue un rôle constitutif dans la structuration de notre expérience et dans la formation de notre imagination et de notre raisonnement. En d'autres termes, plutôt que d'être le produit d'une comparaison entre deux choses ou idées existantes, la métaphore, telle que la conçoivent Lakoff et Johnson, est ce qui *donne naissance aux concepts abstraits.*

Avec cette nouvelle interprétation de la « projection figurative », tournons-nous maintenant vers les racines perceptives et corporelles de notre pensée et vers le rôle des métaphores pour « mettre le corps dans l'esprit ». En portant une attention fine, nous découvrirons rapidement que les métaphores corporelles laissent leurs traces partout — et surtout, dans notre langage quotidien. Tout d'abord, nous parlons de la compréhension en termes perceptifs comme « je vois », ou « je saisis ». Ceci implique que la compréhension est conçue comme un acte d'absorption de stimuli physiques. De plus, considérons des expressions comme « amour brûlant » ou « surcharge cognitive ». Dire qu'elles sont fondées sur des comparaisons voulant que « l'amour soit comme un feu » ou « l'esprit soit comme un contenant surchargé » ne rend pas justice au pouvoir de la métaphore. En effet, il n'y a pas vraiment motifs de comparaisons *avant* que les liens exposés par ces expressions ne soient établis. Ces liens créent ces sens. C'est grâce à eux et au fait qu'ils se réfèrent à des idées abstraites (amour, esprit) et à des choses qui nous sont intimement familières par notre expérience perceptive (feu, contenu/contenant) que des termes comme « amour » et « esprit » sont délimités et ainsi significatifs. De l'association entre « amour » et « brûler » ressort que l'amour peut « réchauffer nos cœurs » (une autre métaphore !), mais qu'il peut aussi avoir un effet dévastateur, comme c'est souvent le cas pour le feu. En termes simplistes, mais persuasifs (et métaphoriques !), la compréhension immédiate directe — la compréhension de base obtenue par la perception — produit les primitives à partir desquelles des significations plus avancées sont construites.

Une autre question qui nécessite attention est relative au mécanisme de construction métaphorique. Selon Lakoff et Johnson, le véhicule de nos connaissances construites expérimentalement est un *schéma incarné* (aussi appelé *schéma-image*). Johnson parle des schémas incarnés comme de « structures of an activity by which we organize our experience in ways that we can comprehend. They are a primary means by which we *construct* or *constitute* order and are not mere passive receptacles into which experience is poured » [10] (pp. 29–30). Ces structures sont à la base de notre capacité d'abstraction et de généralisation: d'une certaine façon, elles forment le squelette de notre expérience une fois dépouillé de la chair des instanciations concrètes. Tout au long de notre existence consciente, nous sommes engagés dans une activité continue d'organisation de nos multiples interactions avec le monde, dans un but continuel de donner un sens aux choses que nous vivons. « A schema is a recurrent pattern, shape, and regularity in, or of, these ongoing (ordering) activities » [11] (p. 29). En résumé, un schéma incarné est ce qui résume, organise et préserve l'essence de notre expérience « pour une utilisation future » et, se faisant, il est un outil pour gérer les multiples stimuli physiques et intellectuels auxquels nous sommes confrontés tout au long de notre vie.

Contrairement aux expressions symboliques et linguistiques avec lesquelles nous communiquons nos connaissances aux autres, et tout à fait contrairement à la vision Objectiviste de la connaissance, les schémas incarnés sont généralement *non-propositionnels.* Le nom donné à ces constructions mentales spéciales reflète cette caractéristique centrale : elles sont semblables à des images et elles sont incarnées dans le sens où elles devraient être considérées comme des reflets analogiques de l'expérience corporelle plutôt que comme des déclarations factuelles dont nous pourrions vouloir vérifier la validité. La nature non-propositionnelle des schémas incarnés rend difficile, voire impossible, leur description en mots. Seules leurs implications — les connaissances factuelles générées par les schémas — peuvent être présentées verbalement. Quant aux schémas eux-mêmes, « while we may describe features of their structure propositionally using finite representations, we thereby lose our ability to explain their natural operation and transformations » [12] (p. 23). Nous devrions garder cette question en tête lorsqu'il est question de la difficulté invariablement rencontrée par les mathématiciens qui tentent de communiquer leurs idées hautement abstraites aux autres.

Si les schémas incarnés ne peuvent être considérés comme la contrepartie mentale d'un système d'énoncés factuels, se pose alors la question des moyens cognitifs par lesquels ces schémas sont traités. Là encore, trompés par nos connaissances antérieures, nous pouvons facilement glisser vers une version simplifiée et déformée. Les images mentales semblent être l'alternative naturelle à la structure propositionnelle. L'idée qu'un schéma incarné soit une image mentale est d'autant plus convaincante que ces deux structures cognitives présentent les mêmes caractéristiques principales : elles sont analogiques et holistiques. Certes, un schéma incarné peut être étayé par une image mentale, mais il existe une différence cruciale entre les deux : alors qu'une image mentale est toujours une image de quelque chose de concret et est donc pleine de détails (c'est pourquoi Johnson l'appelle une « image riche »), un schéma incarné est général et malléable. Il n'est qu'un squelette avec de nombreuses parties variables qui, étant indéterminées, ne peuvent être visualisées. La généralité de ce schéma incarné est ce qui lui donne son pouvoir structurant et sa capacité à englober, dans une construction mentale gérable, une grande variété de nos expériences. (Malgré le fossé presque infranchissable entre la théorie de Lakoff et Johnson et l'approche de la cognition par le traitement de l'information, il peut être tentant de comparer l'idée de schéma incarné au concept de « cadre » de Minsky (1975)).

La question initiale sur la façon dont l'expérience corporelle est métaphoriquement transmise à une sphère de pensée plus abstraite a maintenant sa réponse : les schémas incarnés, conçus pour mettre de l'ordre dans notre expérience physique, sont « empruntés » pour donner forme, structure et sens à notre imagination.

Le rôle constitutif de la métaphore dans la pensée scientifique est reconnu depuis un certain temps déjà (voir par exemple Ortony, 1979 ; Knorr, 1980). Récemment, certains auteurs ont introduit le concept de métaphore (et de métonymie) dans leur analyse de la pensée mathématique (voir par exemple Pimm, 1987, 1990). La théorie de Lakoff et Johnson se distingue toutefois de tous les travaux précédents à deux égards. Premièrement, elle dépasse toutes les autres approches par l'importance qu'elle accorde aux métaphores et à leur impact sur la pensée humaine. La thèse centrale de Lakoff et Johnson est que les métaphores constituent l'univers des idées abstraites, qu'elles le créent plutôt que de le refléter, qu'elles sont la source de notre compréhension, de notre imagination et de notre raisonnement. Deuxièmement, la théorie se concentre sur un type particulier de métaphore — une métaphore dont la source se trouve dans notre expérience corporelle. Ainsi, l'affirmation centrale de Lakoff et Johnson est que les idées abstraites héritent de la structure de l'expérience physique, corporelle, perceptuelle. Dans les sections suivantes, je vais tenter de traduire ces idées dans le domaine des mathématiques. Ce contexte spécial montrera avec une clarté particulière qu'en ce qui concerne l'imagination, le mécanisme de construction métaphorique est une arme à double tranchant. D'une part, il est ce qui permet à l'univers des idées abstraites d'exister ; d'autre part, cependant, « les métaphores selon lesquelles nous vivons » [13] imposent des contraintes évidentes à notre imagination et à nos compréhensions. Nos compréhensions et notre imagination ne peuvent aller qu'aussi loin que les structures métaphoriques existantes le permettent. Et pour progresser, les mathématiciens créatifs doivent souvent dépasser cette ligne tracée par l'expérience corporelle.

L'origine des objets mathématiques

L'idée que les abstractions mathématiques sont étroitement liées à la connaissance que nous construisons à travers nos rencontres avec la réalité physique et qu'elles sont contraintes par cette dernière a déjà été soulevée par plusieurs auteurs. En défendant une vision (quasi-) empiriste des mathématiques, Kitcher (1984, p. 11) avance que « We can identify a perceptual basis for mathematical knowledge » [14]. De son côté, Cobb (1985, 1990) affirme que « actual and represented sensory-motor action plays a crucial role in mathematical activity » [15] en montrant comment des actions concrètes conduisent à l'émergence du concept de nombre chez les jeunes enfants.

En mathématiques avancées, à des niveaux plus éloignés de la réalité physique, il est possible que la source immédiate d'une métaphore soit une autre structure mathématique de niveau inférieur. Malgré cela, et, quelle que soit la longueur de la chaîne de métaphores, tout ce qui se passe dans notre esprit est avant tout ancré dans notre corps. L'intelligibilité des objets abstraits découle du fait qu'ils sont des reflets métaphoriques de notre expérience corporelle. Dans la discussion qui suit, mon objectif sera d'expliquer la nature de la relation entre l'abstrait et l'expérientiel et de montrer comment les dimensions corporelles de notre existence permettent et limitent nos compréhensions. Je me concentrerai sur le matériel recueilli durant trois entretiens semi-structurés complets (trois heures et plus) avec des mathématiciens de renom : un logicien (appelons-le ML), un théoricien des ensembles (ST) et un spécialiste de la théorie ergodique (ET) (tous les entretiens ont été menés en hébreu). À divers moments, j'aurai également recours aux écrits autobiographiques de mathématiciens.

Des concepts mathématiques à visages humains : La métaphore de l'objet ontologique

L'univers mathématique, peuplé d'objets mathématiques et animé par les manipulations qui peuvent être effectuées sur ces objets, ne peut être compris autrement que comme le reflet métaphorique d'un monde physique. Lakoff et Johnson (1980) expliquent la force particulière de la « métaphore de l'objet ontologique » :

> Our experience of physical objects and substances provides a further basis for understanding. Understanding our experiences in terms of objects and substances allows us to pick out parts of our experience and treat them as discrete entities or substances of a uniform kind. Once we can identify our experiences as entities or substances, we can refer to them, categorize them, group them, and quantify them—and, by this means, reason about them. [16] (p. 25)

Il suffit d'écouter des mathématiciens parler de leurs idées pour réaliser qu'en mathématiques, la métaphore de l'objet ontologique est omniprésente. Clairement, le langage utilisé pour décrire les entités mathématiques de base dans les manuels objetise ces dernières: « un nombre complexe est une paire ordonnée de », « un groupe est un ensemble d'éléments muni d'une opération binaire telle que », « prenons une région délimitée d'un espace à *n* dimensions... ». Les noms donnés aux différentes entités et propriétés mathématiques prennent ainsi clairement racine dans le monde des objets matériels : une fonction peut être *croissante* ou *décroissante*, un champ peut être *fermé* ou *ouvert*, un modèle ou une théorie peut être *saturé(e)* ou *stable*. Le fait que nous utilisons le mot « existence » pour parler d'objets abstraits (comme dans les théorèmes d'existence) reflète de manière très persuasive la nature métaphorique du monde des idées abstraites. Greeno (1991) rend explicite cette métaphore de l'objet ontologique lorsqu'il compare la compréhension des mathématiques à l'idée de « knowing one's way around in an environment and knowing how to use its resources » [17] (p. 175).

Des métaphores sont apparues à maintes reprises dans mes conversations avec les mathématiciens. Sondés sur ce qui se passe dans leur esprit lorsqu'ils sentent avoir atteint la compréhension profonde d'une idée mathématique, ils ont unanimement affirmé que la base de ce sentiment n'est pas un pouvoir de manipulation, mais une capacité à « identify a structure that [one is] able to grasp somehow » [18] (ST), « to see an image » [19] (ET), ou « to play with some unclear images of things » [20] (ML). Dans les mots de ET: « In those regions where I feel an expert, … the concepts, the [mathematical] objects turned tangible for me. » [21] ST a exprimé explicitement son besoin de métaphore (ST a utilisé le mot « métaphore » de son propre chef ; il va sans dire que j'ai essayé de formuler mes questions aux personnes interrogées dans un langage sans théorie ; à ce stade particulier, ce n'était pas trop difficile, car l'idée d'utiliser le cadre de Lakoff et Johnson pour l'analyse de la compréhension des mathématiciens s'est imposée à moi à la suite des entretiens) :

> To understand a new concept, I must create an appropriate metaphor. A personification. Or a spatial metaphor. A metaphor of structure. Only then can I answer questions, solve problems. I may even be able then to perform some manipulations on the concept Only when I have the metaphor. Without the metaphor I just can't do it. [22]

La réponse se poursuit avec une description qui ne laissait aucun doute sur l'origine corporelle des métaphores qu'il a en tête. D'abord, il y a une métaphore spatiale :

> In the structure, there are spatial elements. Many of them. It's strange, but the truth is that my student also has noticed it … a great many spatial elements. And we are dealing here with the most abstract things one can think about! Things that have nothing to do with geometry, [that are] devoid of anything physical… The way we think is always by means of something spatial… Like in "This concept is above this one" or "Let's move along this axis or along the other one" There are no axes in the problem and still [23]

Je cite ST, mais les trois personnes interrogées ont souligné l'importance de « voir une structure ». Il semble approprié ici de marquer la fine distinction entre l'idée de voir une structure et celle d'avoir une métaphore. Alors que la structure est une caractéristique inhérente à tout sujet et qui peut être considérée indépendamment, sans référence à un élément extérieur, une métaphore est ce qui relie une idée donnée à des concepts avec lesquels une personne est déjà familière. Ainsi, il ne suffit pas de voir une structure pour la comprendre. ST m'a raconté une histoire qui illustre bien cette idée :

> Halmos listened once to my lecture. He is not in set theory (now), he doesn't keep abreast of the progress in the domain and he doesn't know the concepts. After my lecture he told me, "I didn't understand anything, but I enjoyed your talk greatly." "How come?" I asked. And he said: "I don't know the concepts, I don't know what they say, but the structure—how they relate one to another—I grasped very well indeed." [24]

Le raisonnement spatial n'est pas la seule façon de concevoir une structure. ST m'a parlé d'un autre type de métaphore qui apparaît dans son raisonnement mathématique : la personnification. À cet effet, Lakoff et Johnson (1980, p. 33) ont observé que « perhaps the most obvious ontological metaphors are those where the physical object is further specified as being a person » [25]. Hadamard (1949) a peut-être été le premier à remarquer qu'un concept mathématique peut parfois être imaginé comme ayant un « visage humain » — « a physiognomy which allows us to think of it as a unique thing, however complicated it may be, just as we see a face of a man » [26]. ST en a fait une description encore plus colorée :

> There is, first and foremost, an element of personification in mathematical concepts … for example yesterday, I thought about some coordinates. (I told myself) "this coordinate moves here … and it commands this one to do this and that." There are elements of animation. It's not geometric in the sense of geometric pictures, but you see some people moving and talking to each other. [27]

D'une manière similaire, ML remarque :

> When I think about a fat man, I see (in my mind's eye) a fat man. Saturated model seems to me quite like that—like a padded guy. [28]

La manière qu'ont les mathématiciens de parler des constructions mentales avec lesquelles ils accèdent à la compréhension fait souvent écho au concept de schéma incarné — qui supporte la métaphore. Par exemple, l'expression « cloudy imagery »[29] utilisée par Hadamard peut être davantage interprétée comme une preuve de l'apparition de schémas incarnés que comme une référence à une simple visualisation. Hadamard lui-même utilise le mot « schéma » pour décrire cette construction mentale particulière :

> « Every mathematical research compels me to build a schema, which is always and must be *of a vague character* so as not to be deceptive » [30] (p. 77, je souligne, AS)

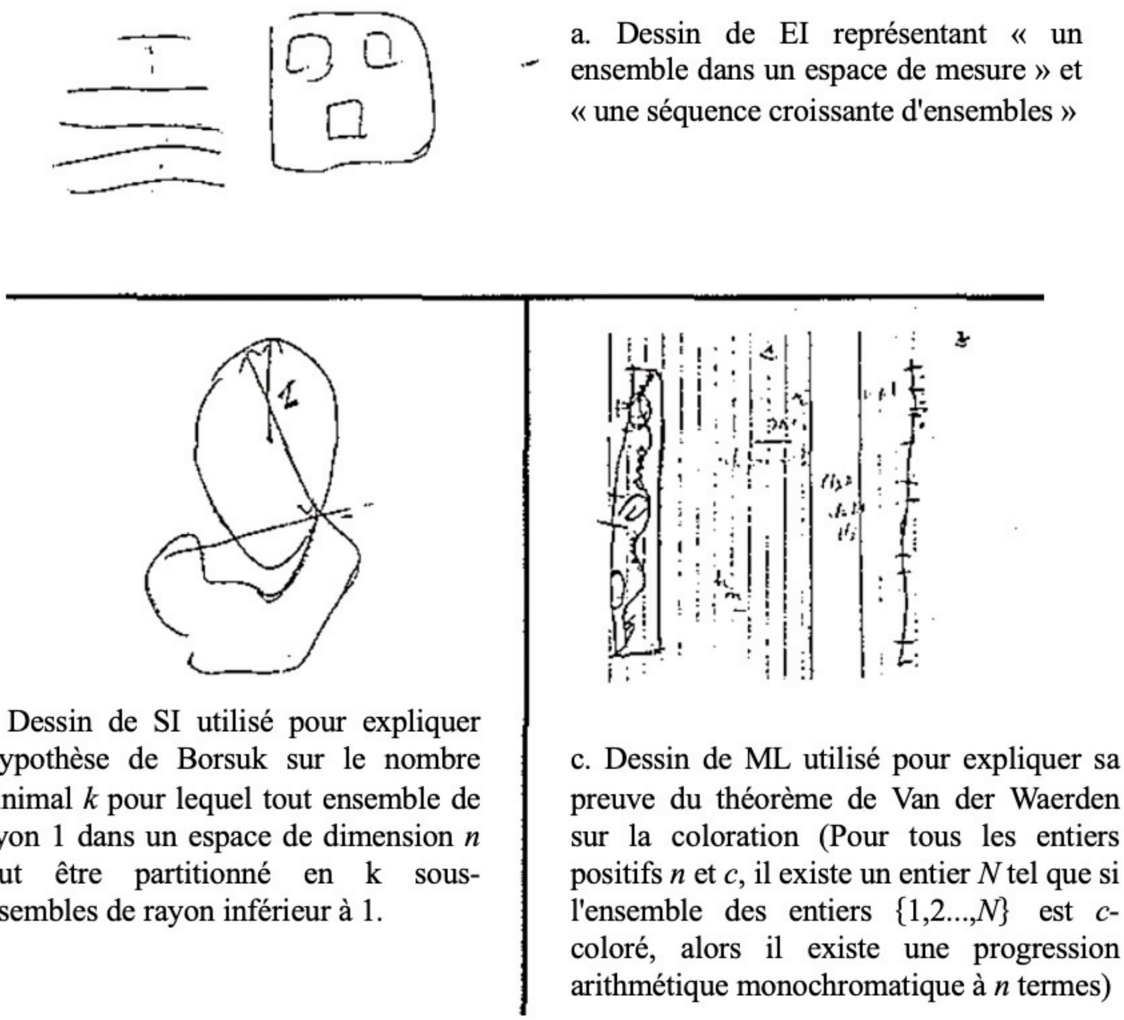
Son « caractère vague » est la caractéristique principale grâce à laquelle le schéma incarné acquiert sa généralité et son pouvoir unificateur. Selon Johnson, c'est exactement la caractéristique qui fait défaut à une « image riche » — à savoir une simple visualisation.

Même si, à plusieurs reprises, toutes les personnes interrogées ont fait remarquer qu'elles avaient fréquemment recours à la visualisation (comparer avec Dreyfus, 1991), elles ont aussi souligné que les images, qu'elles soient mentales ou sous forme de dessins, ne sont qu'une partie de l'histoire. Elles soutiennent la pensée, mais elles ne la reflètent pas dans toutes ses dimensions. En utilisant le terme introduit par Dörfler, je dirais que les images, quelles qu'elles soient, ne sont que des *concrete carriers* [31] pour les schémas incarnés. Les images que les mathématiciens dessinent sur une feuille ou sur un tableau ont un double objectif : elles sont des « supports avec quoi penser » et un moyen de communication. Malgré les limites évidentes d'une image en tant qu'expression de la généralité, ces deux aspects sont extrêmement importants.

Tous les mathématiciens à qui j'ai parlé m'ont dit qu'ils ne pouvaient tout simplement pas penser sans faire des images. Ils ont tous dessiné diverses formes en essayant de m'expliquer certains théorèmes ou conjectures mathématiques. Certains exemples des images qu'ils ont produites sont présentés à la figure 1.

Ce que signifie être « intimement » familier avec un concept mathématique et comment cette familiarité affecte le raisonnement

La façon la plus naturelle d'évaluer la compréhension d'une idée mathématique est d'estimer la facilité avec laquelle on



a. Dessin de EI représentant « un ensemble dans un espace de mesure » et « une séquence croissante d'ensembles »

b. Dessin de SI utilisé pour expliquer l'hypothèse de Borsuk sur le nombre minimal k pour lequel tout ensemble de rayon 1 dans un espace de dimension n peut être partitionné en k sous-ensembles de rayon inférieur à 1.

c. Dessin de ML utilisé pour expliquer sa preuve du théorème de Van der Waerden sur la coloration (Pour tous les entiers positifs n et c, il existe un entier N tel que si l'ensemble des entiers $\{1,2...,N\}$ est c-coloré, alors il existe une progression arithmétique monochromatique à n termes)

Figure 1. Dessins produits par les personnes interrogées pour illustrer des idées mathématiques

raisonne et découvre de nouveaux faits à son sujet. À première vue, le raisonnement mathématique est toujours basé sur une séquence d'inférences qui, de manière systématique, dérivent de nouveaux faits à partir de ce qui est donné et connu. Toutefois, il semble exister un autre mode de pensée en mathématiques qui ne soit pas lié à la déduction systématique. Cet autre mode est beaucoup plus difficile à décrire et à expliquer, mais il s'agit d'une façon particulière de penser qui constitue la preuve ultime d'une compréhension profonde selon plusieurs mathématiciens.

Comme les autres, ET a dit explicitement et plus d'une fois que la capacité de construire une preuve, ou même de l'utiliser pour construire un autre argument, ne suffit pas à lui donner le sentiment d'une « vraie » compréhension. Voici l'une de ses nombreuses remarques à cet effet:

> I can understand a theorem or a proof at a level that I become convinced about its validity. I can understand a theorem sufficiently to reproduce it in a classroom. All this is still not sufficient evidence for me that I really understand. There is another level, in which I can take a proof of a theorem and prove another theorem with the help of the ideas presented in this proof. Even then, I may still claim that I didn't arrive at a true understanding of the proof. [32]

Il ressort clairement de différentes remarques faites par les personnes interrogées que, pour elles, l'une des meilleures indications de la compréhension est la capacité de sentir que quelque chose est vrai de manière immédiate, sans avoir recours à une preuve formelle. Cette capacité d'arriver aux propriétés des objets mathématiques d'une manière directe pourrait bien être ce qui a amené Gauss à faire la déclaration suivante : « I have had my results for a long time; but I do not know yet how I am to arrive at them » [33] (cité par Lakatos, 1976, p. 9).

« Avoir un résultat » sans savoir comment il a été obtenu est peut-être le phénomène le plus frappant dans le travail d'un mathématicien. Tous mes interlocuteurs en ont fait l'expérience dans le passé et ont essayé de me le décrire de plusieurs façons, parfois très ingénieuses. ST a utilisé l'expression « familiarité intime » pour décrire le sentiment qui accompagne le type de compréhension qui permet d'avoir une vision directe des propriétés des objets mathématiques. La métaphore de la personnification a refait surface en tentant d'expliquer cette capacité particulière à prédire le comportement des constructions abstraites :

> When do you feel that you have really understood something? It is only when you are perfectly certain, without having to check, that things must be exactly the way they are. It's like in the case of an intimate familiarity with a person. With such a person you often know what he is going to do without having to ask… The (abstract) things have a life of their own, but if you understand them, you make predictions and you are pretty sure that you will eventually find whatever you foresaw. Like a person whom you really know and understand, (the mathematical construct) will perform certain operations or will react in a certain way to your action. This intimacy is exactly what I had in mind: you know what is to happen without making any formal steps. Of course, as in the case of human relationships, you may sometimes be wrong! [34]

La remarque suivante de Johnson (1987) décrit bien l'essence d'une telle compréhension « intime » :

> Understanding is not only a matter of reflection, using finitary propositions, on some preexistent, already determinate experience. Rather, *understanding is the way we "have a world," the way we experience our world as a comprehensible reality* […] Our understanding *is* our mode of "being in the world." […] Our more abstract reflective acts of understanding (which may involve grasping of finitary propositions) are simply an extension of our understanding in this more basic sense of "having a world." [35] (p. 102)

La compréhension intime s'explique bien à travers une comparaison avec la façon dont les gens comprennent les aspects fondamentaux du monde physique. La compréhension « expérientielle » donne aux gens la capacité d'anticiper les comportements des objets matériels sans réflexion. En effet, lorsque, d'un mouvement rapide, nous sauvons un verre d'eau chambranlant d'une chute certaine, ce n'est pas parce que nous nous sommes souvenus de la loi de la gravité, que nous l'avons confrontée aux données empiriques dont nous disposions et que nous avons fait une déduction appropriée. Notre compréhension s'exprime par la capacité de savoir ce qui va se passer sans même être conscient de la manière dont la prédiction a été faite. Ce type de compréhension confère à notre méthode de traitement des idées abstraites toutes les caractéristiques qui, selon Fischbein (1987), sont typiques de la pensée intuitive : notre connaissance est évidente en soi, coercitive, globale et extrapolée.

Maintenant, la question est de savoir quelles sont les sources de ce sentiment puissant d'évidence et d'inévitabilité concernant les propriétés et les relations qui n'ont pas été déduites de faits connus ? Comment un mathématicien peut-il anticiper des « comportements » des structures abstraites qui n'ont jamais été vus auparavant ? Ici encore, la nature métaphorique de la pensée mathématique peut fournir une explication. On peut dire que ce mode de pensée particulier — appelons-le la *saisie directe* — est possible parce que les nouveaux concepts mathématiques sont créés à l'image de choses précédemment connues et de concepts déjà construits. C'est le porteur de la métaphore — un schéma incarné déterminé par une expérience antérieure — qui apporte l'intuition anticipatrice. Grâce à ce schéma, la logique interne et les autres propriétés de la nouvelle construction abstraite sont héritées de cette expérience antérieure.

Ce mécanisme « héréditaire » qui sous-tend la construction des métaphores présente évidemment des inconvénients. D'abord, en raison de l'origine expérientielle de la séquence hiérarchique des métaphores, les différentes contraintes qui pèsent sur notre imagination — les effets secondaires fondamentaux de l'incarnation — sont léguées comme des traits génétiques d'une génération de concepts abstraits à une autre. Il se peut ainsi que certaines contraintes doivent être allégées pour rendre possible le mouvement vers des idées plus abstraites ; néanmoins, beaucoup d'entre elles seront préservées en cours de route et continueront à délimiter la pensée mathématique.

Un deuxième inconvénient est lié au principe sur lequel repose la saisie directe. Une fois que les objets abstraits émergent et que leurs schémas incarnés sont construits, notre raisonnement abstrait ressemble beaucoup au raisonnement induit par la perception sensorielle : il est holistique, immédiat et, surtout, il est basé sur l'*analogie* plutôt que sur l'inférence logique systématique. Le rôle central de l'analogie dans le raisonnement par saisie directe est ressorti chez les personnes interrogées à travers les constantes références à la « similitude avec des faits connus » lorsqu'elles ont parlé de leur capacité à « prévoir » le comportement des objets mathématiques. La façon dont ET a décrit le mécanisme à l'origine de sa capacité à prévoir les faits mathématiques est tout à fait typique :

> when you ask me whether something is true or not, I can think about it a moment … *find a similarity to something else* … and I can pull an answer out of my sleeve. And all this when I have no inkling about a proof [36] (je souligne, AS)

Il vaut la peine de mentionner que cette déclaration présente une similitude frappante avec ce qu'il est possible d'apprendre des témoignages des scientifiques interrogés par Knorr (1980) : « When scientists were asked to tell the story of the origin of a research effort which they considered to be innovative, they regularly displayed themselves as analogical reasoners who build their 'innovative' research upon a perceived similarity between hitherto unrelated problems contexts » [37] (p. 31).

Le fait que, dans leur travail, les mathématiciens émettent des conjectures met en évidence cette capacité particulière à regarder en avant et à prévoir des choses qui ne sont pas le simple résultat d'inférences logiques. L'extrait suivant du compte rendu de Ian Stewart (1987) sur la manière dont André Weil est arrivé à ses célèbres contributions à la preuve du dernier théorème de Fermat souligne, une fois de plus, l'importance de l'analogie dans la formulation d'hypothèses mathématiques :

> How did Weil come to these conjectures? They weren't just guesswork; he had a strong suspicion that they should hold. They "smelt right". The reason was *analogy* with topology [38] (p. 33; je souligne, la description de Stewart est basée sur les propres témoignages de Weil, AS).

La manière dont l'analogie façonne et limite le raisonnement

Source de la métaphore: équilibre entre deux objets matériels
Objectif de la métaphore: une équation (une égalité entre deux formules)

Raisonnement:

(1) fait connu du domaine source (monde matériel) : un équilibre entre deux objets est préservé lorsque le même changement de masse est porté sur chacun. Présentons-le symboliquement comme une proposition :

P(A,B,CdM)

où A et B sont des objets et CdM est un changement de masse.

(2) identification métaphorique:
- les formules (F, E) sont (représentent) des objets (F=A, E=B)
- une équation est (l'expression) d'un équilibre entre des objets
- une opération sur une formule (OsF) est un changement de masse d'un objet matériel (CdM), ainsi OsF=CdM

(3) inférence:

$$\left.\begin{array}{l}\text{P(A,B,CdM)}\\ \text{F=A, E =B, OsF=CdM}\end{array}\right] \Longrightarrow \text{P(F,E, OsuF)}$$

alors: Une équation (égalité entre deux formules) est préservée si la même opération est faite des deux côtés.

Figure 2. Raisonnement sur les équations basé sur la métaphore « l'égalité est l'équilibre »

mathématique est présentée de manière schématique dans la figure 2. L'exemple est plutôt élémentaire, mais il illustre bien la nature synthétique du raisonnement abstrait basé sur une métaphore d'origine expérimentale et perceptuelle.

Contre l'affirmation selon laquelle on s'appuie sur des métaphores, certains pourraient affirmer que les mécanismes inductifs jouent un rôle beaucoup plus important dans la pensée des mathématiciens que les analogies. Le principe de base de la découverte mathématique, diraient-ils, est de trouver le général en examinant le particulier. Cela impliquerait un usage intensif d'exemples. L'induction joue sans aucun doute un rôle important dans le raisonnement mathématique, toutefois, de nombreux faits plaident avec force contre l'exclusivité de la méthode inductive. Premièrement, comme nous l'avons vu, les mathématiciens eux-mêmes soulignent leur utilisation de l'analogie. Deuxièmement, la difficulté distincte que certains d'entre eux ressentent lorsqu'ils tentent d'expliquer les sources de leurs capacités d'anticipation semble indiquer que le mécanisme de découverte et de compréhension est moins évident que ne le laisse entendre le modèle inductif. Voici un extrait révélateur de ma conversation avec ML, dans lequel il est assez explicite que la « découverte à partir d'exemples » n'est absolument pas sa manière de travailler :

> Examples only confuse me. They don't help me… I have talked to people in my field who do believe in the power of examples. I am also interested in examples, sometimes. From time to time, I look into some. But in my opinion, if you need examples, it means that you must be quite confused. So how did I arrive at my results? (ML parlait de sa contribution spécifique à la théorie des modèles) It's difficult to tell I think that it took me two years before I arrived at the proper image, and even then, I didn't have full proofs for it. I couldn't prove it to other people. But I looked and I saw things. I had a good sense of this world I knew what was plausible and what wasn't. [39]

En ce qui concerne le mécanisme de la saisie directe et de l'invention mathématique, il convient de mentionner un autre facteur important qui est fréquemment présent dans les décisions créatives des mathématiciens : le critère de beauté. Le rôle du jugement esthétique dans le raisonnement mathématique est récurrent dans les récits des mathématiciens sur leur propre pensée. Après avoir affirmé que « l'invention est un choix » (et je dirais que c'est souvent un choix de métaphore), Hadamard explique que « this choice is imperatively governed by the sense of scientific beauty » [40] (p. 31). D'une manière similaire, TS offre cette observation :

> I think that there is an element of aesthetics here … sometimes I make a certain "leap of thought" only because I say to myself that in order for things to be beautiful they must behave in exactly this way and in no other. It must be true this way because otherwise it won't be beautiful enough. I would even go so far as to say that it wouldn't be ethical if it wasn't so. [41]

Une fois de plus, l'utilisation de critères esthétiques, si répandus dans le domaine perceptuel, est une preuve du caractère métaphorique et incarné de la pensée abstraite.

Avant de terminer cette section, permettez-moi de noter que le type de pensée et de compréhension que je décris n'apparaît pas forcément dans la même mesure chez tous les mathématiciens créatifs. Toutes les personnes que j'ai interrogées ont affirmé — et, bien sûr, indépendamment — qu'il existe plus d'un « type d'esprit mathématique ». Leurs remarques peuvent se résumer en considérant l'existence un spectre complet de possibilités et aux extrémités duquel se trouvent deux « styles » fondamentaux de pensée mathématique. Il est possible de décrire ces styles comme *opérationnel* et *structurel*. D'un côté, les types opérationnels ont des capacités de manipulation très développées et les utilisent comme moyen principal dans leur quête de sens. D'un autre côté, disposer d'une métaphore qui rend un objet mathématique à l'image d'une chose réelle est le besoin dominant d'un mathématicien de type structurel. Pour le type structurel, les compétences manipulatoires, la capacité de tirer une argumentation systématique, sont parfois tout à fait secondaires. C'était, par exemple, certainement le cas du grand mathématicien S. Lefschetz, qui, selon Halmos (1985), « saw mathematics not as logic but as pictures. His insights were great, but his 'proofs' were almost always wrong » [42] (p. 87).

Les structuralistes sont plus capables de comprendre directement que ceux qui pensent et comprennent d'une manière opérationnelle. C'est probablement la raison pour laquelle la croyance que la pensée structurelle est supérieure à la pensée opérationnelle était implicite dans les opinions des mathématiciens avec lesquels je me suis entretenue.

Pour résumer ce qui a été dit dans cette section, les métaphores influencent le raisonnement mathématique d'une manière très particulière : avec l'émergence d'un schéma incarné, les processus de pensée peuvent perdre leur caractère purement analytique. Les constructions métaphoriques introduisent des éléments quasi-synthétiques dans le raisonnement mathématique. Les nouvelles vérités mathématiques ne sont plus découvertes par inférence systématique à partir d'axiomes et de définitions (sont-elles même parfois découvertes de cette manière ?!), elles s'imposent plutôt directement au mathématicien comme des propriétés évidentes d'une réalité mathématique. Lorsque la construction abstraite est soutenue par un schéma-image, la perception de ses caractéristiques saillantes peut devenir très semblable à notre perception des propriétés des corps physiques : elle est immédiate, holistique et n'est pas médiée par une longue chaîne d'inférences. C'est cette capacité à saisir les idées de manière directe et quasi-synthétique qui, selon les mathématiciens à qui j'ai parlé, leur donne le sentiment d'une « vraie » compréhension. Même s'il existe divers types d'esprits mathématiques, le phénomène de la saisie directe est probablement connu de la majorité des mathématiciens créatifs.

Le platonisme, pas seulement pour les jours de semaine

Dans les mots de David Hume, la section précédente nous montre que notre connaissance du domaine mathématique n'est pas toujours atteinte par la simple investigation des « relations d'idées ». Très souvent plutôt, une nouvelle vérité est découverte (oui, *découverte*) comme une « relation de faits ». Pour une personne qui a le sentiment de « vraiment » comprendre une idée abstraite, la vérité mathématique revêt un caractère synthétique plutôt qu'analytique.

Davis et Hersh (1981, p. 321) affirment que « the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a Formalist on Sundays » [43]. D'après ce qui a été dit dans la section précédente, il devient clair que ce platonisme « pratique » n'est pas une question de choix délibéré, de sophistication insuffisante ou de manque de maturité mathématique (ou philosophique). C'est plutôt relié à la nature même de notre imagination, à notre manière incarnée de penser aux idées, même les plus abstraites, que nous nous comportons et sentons spontanément comme des platoniciens. Notre imagination et notre raisonnement sont limités par nos expériences sensorielles et même si nous pouvons faire une sortie délibérée au-delà des contraintes de la lunette du monde physique, un tel mouvement, étant consciemment imposé, ne peut être que temporaire. Lorsque nous ne sommes pas forcés (par la raison) de renoncer au platonisme, au nom du formalisme par exemple, notre esprit retourne immédiatement à son état « naturel » — l'état d'une croyance platonicienne en l'existence indépendante des objets mathématiques, dont la nature et les propriétés ne relèvent pas de la décision humaine.

Au cours de l'histoire, aucune nouvelle construction mathématique n'a été pleinement reconnue jusqu'à ce que les mathématiciens aient le sentiment, pour reprendre les mots de Davis et Hersh, qu'elle était aussi réelle pour eux que le rocher de Gibraltar ou la comète de Halley. Pour arriver à une telle certitude, il n'a pas suffi pas de comprendre la logique interne d'une définition et de reconnaître sa cohérence avec tous les autres faits mathématiques. Ce qui était nécessaire, c'était une métaphore appropriée, une métaphore qui montrerait qu'en fait, la nouvelle idée ne violait pas les lois fondamentales de l'univers abstrait. Dans le monde platonicien des idées, l'expression « lois fondamentales » porte un sens très particulier et a une signification plus grande que les lois de la logique. Dans le domaine des objets matériels, les événements sont déterminés par les lois de la nature. Des phénomènes comme la chute libre d'une pierre jetée d'une fenêtre sont inévitables. Notre sentiment que l'univers abstrait est régi par des lois déterministes tout aussi intransigeantes est inhérent à la manière métaphorique dont nous construisons le système d'idées.

Ceci est un témoignage typique d'un mathématicien, parlant de l'un de ses principaux résultats :

> Mathematicians often argue whether mathematics is discovered or invented. I certainly had the feeling in that particular case that I was discovering it and not inventing it. We couldn't have invented all that. We had discovered a structure that must have been there. At least, that's the feeling I had; it hung together too well [44] (Henry Pollak, cite dans Albers and Alexanderson, (1985) p. 243)

Alors que pour Pollak la position platonicienne pourrait être principalement une question d'attitude de travail, certains mathématiciens admettent ouvertement qu'il s'agit de leur profonde conviction philosophique ; René Thorn (1971) est l'un d'eux :

> Everything considered, mathematicians should have the courage of their most profound convictions and thus affirm that *mathematical forms indeed have an existence that is independent of the mind considering them.* [45]

Dans un même ordre d'idées, tous les mathématiciens avec lesquels j'ai discuté ont parlé de leur croyance profonde en une « réalité » des objets abstraits, même si certains d'entre eux ont souligné qu'il s'agissait seulement d'un sentiment et non d'une croyance philosophique solide. Cet état d'esprit platonicien, affirmaient-ils, faisait partie intégrante d'un sentiment de compréhension profonde.

ET a apporté une contribution très intéressante à ma compréhension de la relation entre la compréhension d'un concept et la croyance en son existence objective. Il a déclaré qu'étant une personne religieuse, il adopte pleinement la vision platonicienne ; il a ensuite déclaré que les concepts mathématiques qu'il comprend bien sont conçus par lui comme se référant à des objets aussi réels « qu'une feuille tombant d'un arbre dans une forêt ». Par exemple, il pense bien savoir ce qu'est un ensemble infini et ce sentiment de compréhension signifie aussi qu'il ne « doute pas de l'existence d'un infini réel ». D'un autre côté, ET a des doutes sur les nombres réels, ou plutôt sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de ces derniers. Ce qui le dérange, c'est l'indépendance de l'hypothèse du continuum par rapport aux systèmes axiomatiques admis.

> Until a few years ago I was prepared to declare that our problem with the continuum hypothesis is that we did not formulate (understand) our system in the right way—the way which would make it possible to decide it in this way or another. I could not tolerate the independence of the continuum hypothesis because it was my deep conviction that the set in question must exist or not [46]

Le doute d'ET provient, de toute évidence, du statut peu clair d'un certain ensemble quant à la nature de son existence. Ses objections justifient parfaitement la nature restrictive de la métaphore. L'indécidabilité de l'existence d'un objet — n'importe quel objet, concret ou abstrait — défie nos intuitions de base fondées sur l'expérience : elle implique qu'il serait légitime de supposer l'existence d'un nombre supérieur à χ_0 mais inférieur à χ.

Toutefois, dans notre monde perceptif régi par le principe du tier exclu, les objets existent ou n'existent pas et la question « être ou ne pas être » ne peut recevoir qu'une seule réponse — « oui » ou « non ». De plus, ce n'est pas à nous de choisir la réponse. (Soit dit en passant, cet exemple nous éclaire sur la difficulté qu'ont eue les mathématiciens à accepter l'idée de géométries non euclidiennes). Tout ceci montre l'autre côté de l'épée métaphorique : les contraintes que l'expérience corporelle impose à notre imagination.

Enfin, permettez-moi de mentionner certaines comparaisons éclairantes entre les mathématiques et les échecs qui ont été partagées indépendamment par ML et par ST. Le but de ces comparaisons était de montrer une différence objective ou simplement pragmatique entre un simple jeu et une abstraction comprise et prise au sérieux. Afin de souligner l'importance pratique de la croyance en la réalité des idées abstraites, ST m'a fait part de sa conviction que « even a chess player, if he is really engaged in the game, cannot think he is just playing … all this must be for real »[47]. ML a de son côté déclaré que « when I deal with (mathematical ideas) they exist for me, whether I can justify them philosophically or not » [48]. Sa position a ensuite été expliquée de la manière suivante :

> I was interested in chess. I don't know how able I was as a player, but I stopped doing it at a certain stage I stopped when I realized I would have to learn it. My feeling was that the game is very interesting, but it is an artificial construction. There is no logical necessity behind these rules. (By contrast) mathematical theories are not arbitrary. You really discover them. You try to move them and after a while you realize that you cannot formulate them in a substantially different way. [49]

Aux yeux de ML, les lois des mathématiques sont « naturelles », à un tel point qu'il n'est pas nécessaire de les apprendre — elles s'imposent simplement à l'esprit. Les règles d'un jeu, au contraire, sont arbitraires et ne peuvent être apprises de manière sensée. La question intéressante est de savoir d'où viennent ces perceptions différentes de la nature des lois des mathématiques et des règles des échecs. La recherche d'une réponse nous ramène inévitablement aux racines expérientielles de notre imagination : l'explication la plus plausible de la position adoptée par ML est qu'il disposait d'une bonne métaphore fonctionnelle pour ses abstractions mathématiques alors qu'aucune expérience corporelle ne soutenait le jeu d'échecs.

La réification comme naissance d'une métaphore

Si le sens des concepts abstraits est créé à travers la construction de métaphores appropriées, alors les métaphores, ou projections figuratives du monde tangible sur l'univers des idées, sont la base de la compréhension. Tel qu'observé dans les sections précédentes (voir également Sfard, 1987, 1991, 1992), le principal type de métaphore interprétative en mathématiques est la métaphore de l'objet ontologique. Dans cette dernière section, j'aborderai très brièvement la question complexe de la création une telle métaphore et les difficultés inhérentes à ce processus.

J'ai déjà discuté de ceci de manière assez approfondie ailleurs. Dans la présente analyse, j'essaierai de tirer parti de la théorie de Lakoff et Johnson, à la fois pour souligner certains points soulevés dans le passé et pour jeter un nouvel éclairage sur certains aspects négligés jusqu'alors. Par nécessité, je n'entrerai pas en profondeur dans le sujet ; dans cette section finale, je me contenterai d'identifier certaines questions à approfondir.

À première vue, comme j'ai déjà noté (Sfard, 1991), il n'y a aucune raison de parler de « choses » aussi intangibles que des nombres, des fonctions, des ensembles, des groupes et des espaces de Banach. Un examen minutieux des mathématiques ferait plutôt ressortir que ce sont les processus effectués mentalement qui comptent vraiment. Ces processus étant d'abord fait sur des objets physiques (par exemple compter, mesurer), puis, à un niveau supérieur, sur ces processus primaires eux-mêmes. Cependant, le fait que le monde des idées mathématiques abstraites soit fait à l'image de la réalité physique est en pleine conformité avec la théorie de Lakoff et Johnson. C'est notre expérience corporelle qui nous oblige à penser aux processus comme étant effectués sur certains objets et comme produisant d'autres objets. Le nom de « réification » a été donné à l'acte de création de ces entités abstraites (d'autres auteurs, par exemple Dubinsky (1991), utilisent le terme « encapsulation » d'une manière similaire). Je peux maintenant l'exprimer dans des termes légèrement différents et dire que la réification est la naissance de la métaphore de l'objet ontologique.

Le principe de base qui sous-tend ces idées est que du point de vue du développement, les concepts opérationnels cèdent le pas aux concepts structurels, c'est-à-dire que la familiarité avec un processus est une base pour la réification. En utilisant les idées de Lakoff et Johnson, je peux maintenant élargir et affirmer que, la plupart du temps, la réification est la transition d'un schéma opérationnel à un schéma structurel incarné. La classification en schéma opérationnel et structurel nécessiterait beaucoup plus d'explications que celles qui peuvent être données dans cette courte section de conclusion (Dörfler (1992) et Presmeg (1992) font des distinctions légèrement différentes). Espérant que les idées s'expliquent plus ou moins d'elles-mêmes, je me limiterai à quelques points fondamentaux. Un schéma opérationnel apporte dans le domaine de l'abstraction une métaphore de l'action, de l'opération sur certains objets pour obtenir certains autres objets. Il s'agit d'un schéma d'action. Le schéma structurel incarné, quant à lui, est ontologiquement complètement différent — il implique la construction permanente d'un objet sur laquelle on peut agir pour produire d'autres constructions. L'avantage du schéma structurel incarné est qu'il est plus intégratif, économique, manipulable et plus propice à un traitement holistique (ou traitement parallèle). L'imagerie visuelle en est une composante intégrale.

À la lumière des témoignages des mathématiciens, la règle générale de la préséance développementale des conceptions opérationnelles relativement aux conceptions structurelles admet ses exceptions. Les mathématiciens ne suivent pas nécessairement cette séquence processus-objet. Ces adeptes de la pensée abstraite sont bien entraînés à faire apparaître de nouvelles entités abstraites à partir d'autres entités abstraites et peuvent ainsi souvent recourir directement à la métaphore de l'objet ontologique, sans se soucier des processus sous-jacents. C'est certainement la façon dont ST pense et comprend les mathématiques :

> When I have a new concept, I need a human metaphor. Personification of the concept. Or a spatial metaphor. A new metaphor of a structure. Only when I have it can I answer questions, solve problems, perform manipulations. I can do all this only after I have the metaphor. [50]

Je tiens à souligner une fois de plus que ST a utilisé le mot « métaphore » de son propre chef ayant entendu des travaux de Lakoff et Johnson pour la première fois après l'entretien. Malgré ses idiosyncrasies, ST a suggéré (encore une fois, de son propre chef) que la périodicité opérationnelle–

structurelle peut être détectée dans de nombreux processus historiques, tel celui du développement de l'algèbre.

Comme je l'ai soulevé à plusieurs reprises dans le passé, la réification, qu'elle précède ou suive la construction d'un schéma opérationnel, n'est souvent atteinte qu'au prix d'un effort acharné, voire même, pas du tout. Cette discussion sur la question de la compréhension jette une lumière nouvelle sur la difficulté inhérente à la réification. Le problème fréquent avec les nouvelles idées abstraites est qu'elles n'ont pas de contrepartie dans le monde physique ou pire encore, qu'elles peuvent contredire ouvertement nos connaissances expérientielles. Évidemment, dans ce dernier cas, aucune métaphore n'est disponible pour soutenir ces abstractions. Par exemple, le concept de nombres transfinis transgresse le principe fondamental et établi par l'expérience selon lequel « la partie est inférieure au tout ». Cette divergence entre l'abstrait et l'expérimental a dérangé Cantor, le fondateur de l'idée d'un nombre transfini, à tel point qu'il a écrit à Dedekind pour lui demander de l'aide dans le traitement de la chose qu'il pouvait lui-même « voir, mais ne pouvait pas croire ». En fait, l'idée même de réification contredit notre expérience corporelle : nous parlons ici de la création de quelque chose à partir de rien. Ou de traiter un processus comme son propre produit. Il n'y a rien de tel dans le monde des entités tangibles, où un objet est une « valeur ajoutée » d'une action, où les processus et les objets sont des entités séparées, ontologiquement différentes et qui ne peuvent se substituer. Notre nature entière se rebelle contre l'idée très dérangeante de considérer, par exemple, la recette d'un gâteau comme le gâteau lui-même.

La dernière remarque que je souhaite faire concerne le caractère discontinu, presque chaotique, de la réification et, plus généralement, du processus de compréhension. Une illustration pertinente de ce que je veux dire ici se trouve dans l'extrait de l'autobiographie d'Halmos cité dans l'introduction de cet article. De nombreux témoignages de mathématiciens, dont tous mes interlocuteurs, confirment la thèse de Hadamard selon laquelle les illuminations soudaines comme celle qui a apporté à Halmos la « compréhension d'epsilon » sont « absolutely general and common to every student of research » [51] (Hadamard, 1949, p. 15). Tous mes interlocuteurs ont remarqué à plusieurs reprises que le processus de compréhension est plein de singularités et de sauts soudains. Il semble tout à fait probable que les sauts sont le résultat de la réification, qu'ils marquent la naissance d'une métaphore structurelle qui donne au concept sa « physionomie » et lui donne ainsi un sens. Les deux citations suivantes sont des récits autobiographiques typiques qui illustrent bien ce point. Voici la première:

> les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures. (Poincaré, 1920, p. 51)

Voici maintenant l'autre :

> After struggling for years, the insights eventually came to me that made it all fall into a place. It all hung together in an incredible way—every loose end had its natural location [52] (Pollak raconte ici l'histoire de son travail sur la concentration de signaux qu'il a fait avec deux autres mathématiciens ; cité dans Albers et Alexanderson,1985, p. 243)

Il est intéressant de constater à quel point le langage utilisé par Poincaré et Pollak dans leurs descriptions est « physique ». Les mathématiciens parlent d'idées abstraites comme s'il s'agissait de corps matériels: « It all fell into place » [53] (une expression aussi utilisée par Halmos : « It all clicked and fell together » [54] !), « it hung together » [55], « je les sentais se heurter », « jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent », « every loose end had its natural location » [56]. Il ne fait guère de doute qu'il s'agisse là des récits d'une émergence soudaine de la métaphore de l'objet ontologique.

La question des discontinuités dans le processus de compréhension semble être de la plus haute importance et, en même temps, elle ne se prête pas facilement à l'investigation. Freudenthal (1978), qui convient que « what matters in the learning process are discontinuities » [57] (p. 165), est néanmoins assez sceptique quant à la possibilité d'une recherche empirique : les discontinuités ne peuvent être découvertes que par une observation continue, mais même pour les enseignants et les chercheurs en éducation, il ne sera pas facile d'observer ces éléments essentiels dans le processus d'apprentissage. Ainsi, l'étude approfondie que mérite certainement ce phénomène de « big-bang » devra être précédée de préparations méthodologiques.

Morale pour experts et pour novices

En accord avec la théorie de Lakoff et Johnson d'une part et d'autre part avec mes propres travaux, j'ai essayé de montrer dans cet article que la métaphore de l'objet ontologique, même si elle n'est apparemment qu'une option dans la pensée mathématique, est en fait indispensable pour le type de compréhension que les gens appelleraient « profonde » ou « vraie ». En citant des mathématiciens qui ont parlé de leur propre façon de construire un sens, j'ai expliqué comment, dans ce processus, notre expérience corporelle entre dans le domaine des idées abstraites, à la fois pour le créer et pour le confiner. La réification — le passage d'un mode de pensée opérationnel à un mode de pensée structurel — est un phénomène fondamental dans la formation d'un concept mathématique. J'ai tenté ici de montrer que la réification est, en fait, la naissance d'une métaphore qui fait exister un objet mathématique et approfondit ainsi notre compréhension. Les contraintes que notre connaissance perceptivement acquise impose à notre imagination rendent la réification intrinsèquement difficile.

Une des conclusions est cette possibilité d'éduquer notre imagination et d'élargir l'univers mathématique en relâchant petit à petit les contraintes perceptuelles, et en ouvrant progressivement la voie du banal au « jamais entendu » avec une chaîne élaborée de métaphores de plus en plus abstraites. Chaque couche de l'édifice hiérarchique des idées mathématiques est une nouvelle étape dans notre lutte pour nous libérer des restrictions corporelles — et pour mieux comprendre le monde de l'abstraction.

Dans cet article, je me suis limitée aux mathématiciens et à leurs méthodes particulières de travailler la compréhension. Une question importante est de savoir dans quelle mesure les observations concernant les experts s'appliquent également aux novices — pour les écoliers et les étudiants, je n'ai d'autre choix que de laisser cette question ouverte. Je ne terminerai pas cet article, cependant, sans formuler quelques implications provisoires pour l'apprentissage et l'enseignement.

L'étude des modes de pensée des mathématiciens offre un message important et probablement assez universel sur la nature et les conditions de la compréhension. Le rôle de la métaphore de l'objet dans ce processus ne peut être surestimé. Même si l'idée peut être véhiculée sous de nombreux déguisements différents, la littérature abonde en résultats et en arguments qui soutiennent l'idée selon laquelle la tendance naturelle à la pensée structurelle est typique non seulement des mathématiciens, mais aussi des élèves plus doués (voir par exemple Krutetskii, 1976). L'implication immédiate est donc, qu'en tant qu'enseignants, nous devrions encourager la pensée structurelle et aider les « novices » à construire leurs propres métaphores structurelles : Comment pouvons-nous induire le processus qui fait naître la métaphore de l'objet ? Il a beaucoup été question des difficultés inhérentes à la réification. Des études ont montré que même les efforts les plus sincères pour faire naître la métaphore appropriée ne sont souvent récompensés que par un succès limité (voir par exemple Sfard, 1992). En raison de la relation étroite qui existe entre la métaphore de l'objet et la question de la visualisation, il semble que la grande accessibilité actuelle des ordinateurs et de l'infographie ouvre des avenues didactiques prometteuses.

Reconnaissance

Je suis redevable à Lesley Lee pour les discussions qui ont approfondi ma compréhension de la compréhension mathématique.

Notes

[1] Version modifiée d'une communication invitée présentée au troisième symposium international de Bratislava sur l'enseignement des mathématiques, août 1993.

[2] Fondamentalement, la recherche ne m'intéresse pas et ne m'a jamais intéressé. Ce qui m'intéresse, c'est de *comprendre*, ce qui est tout à fait différent.

[3] J'étais un étudiant, parfois très bon, parfois moins bon. Les symboles ne m'intimidaient pas... je pouvais assez bien jongler avec eux... [mais] la subtilité infinitésimale de l'analyse epsilontesque me laissait perplexe. Je pouvais lire des preuves analytiques, m'en souvenir si je faisais un effort, et les reproduire, en quelque sorte, mais je ne savais pas vraiment ce qui se passait.

[4] ... un après-midi, il s'est passé quelque chose... Je me souviens que j'étais devant le tableau noir de la salle 213 du bâtiment de mathématiques et que je discutais avec Warren Ambrose, quand soudain, j'ai compris epsilon. J'ai compris ce qu'étaient les limites et tout qu'on m'avait, jusque-là, fait travailler à répétition est devenu clair. Cet après-midi-là, je me suis assis avec le manuel de calcul de Granville, Smith et Longley. Toutes ces choses qui n'avaient auparavant aucun sens sont devenues évidentes...

[5] conceptuellement et propositionnellement exprimables en termes littéraux pouvant correspondre à des aspects objectifs de la réalité.

[6] Connaître, c'est représenter fidèlement (dans sa tête) ce qui est en dehors de l'esprit.

[7] Étant donné que les personnes du domaine de l'éducation mathématique reconnaissent presque toutes que l'apprentissage est un processus constructif, il semble peu probable qu'une d'entre elles puisse prendre au pied de la lettre la vision représentationnelle et croire que l'apprentissage soit un processus de perception immaculée.

[8] « expérience » doit être comprise dans son sens très riche et très large, incluant les expériences perceptuelles, motrices, émotionnelles, historiques, sociales et linguistiques.

[9] Le « corporel » monte vers le « conceptuel » et le « rationnel ».

[10] structures d'une activité par lesquelles nous organisons notre expérience de manière à ce qu'elle soit compréhensible. Elles sont un moyen essentiel par lequel nous *construisons* ou *constituons* l'ordre et ne sont pas de simples réceptacles passifs dans lesquels l'expérience est déversée.

[11] Un schéma est un modèle, une forme et une régularité récurrents dans, ou de, ces activités (de commande) en cours.

[12] si nous pouvons décrire les caractéristiques de leur structure de manière propositionnelle en utilisant des représentations finies, nous perdons ainsi notre capacité à expliquer leur fonctionnement et leurs transformations naturelles

[13] Il s'agit d'une traduction directe du titre anglais du livre de Lakoff, « Metaphors we live by ». La traduction française s'intitule « Les métaphores dans la vie quotidienne »

[14] Nous pouvons identifier une base perceptuelle pour la connaissance mathématique

[15] l'action sensori-motrice réelle et représentée joue un rôle crucial dans l'activité mathématique

[16] L'expérience que nous avons des objets et des substances physiques constitue une base pour des compréhensions subséquentes. Le fait de comprendre nos expériences en termes d'objets et de substances nous permet de sélectionner des parties de notre expérience et de les traiter comme des entités discrètes ou des substances d'un type uniforme. Une fois que nous pouvons identifier nos expériences comme des entités ou des substances, nous pouvons nous y référer, les catégoriser, les regrouper et les quantifier — et, par conséquent, raisonner à leur sujet.

[17] savoir se repérer dans un environnement et savoir en utiliser les ressources.

[18] identifier une structure que [l'un] peut saisir d'une manière ou d'une autre

[19] De voir une image

[20] jouer avec des images imprécises de choses

[21] Dans les domaines où je me sens expert, … les concepts, les objets [mathématiques] deviennent tangibles pour moi.

[22] Pour comprendre un nouveau concept, je dois créer une métaphore appropriée. Une personnification. Ou une métaphore spatiale. Une métaphore de la structure. Ce n'est qu'alors que je peux répondre à des questions, résoudre des problèmes. Je peux même être en mesure d'effectuer certaines manipulations sur le concept uniquement lorsque j'ai la métaphore. Sans métaphore, je ne peux pas le faire.

[23] Dans la structure, il y a des éléments spatiaux. Ils sont nombreux. C'est étrange, mais la vérité est que mon étudiant l'a également remarqué... beaucoup d'éléments spatiaux. Et il s'agit ici des choses les plus abstraites auxquelles on puisse penser ! Des choses qui n'ont rien à voir avec la géométrie, [qui sont] dépourvues de toutes dimensions physiques… La façon dont nous pensons est toujours au moyen de quelque chose de spatial... Comme dans « Ce concept est au-dessus de celui-ci » ou « Déplaçons-nous le long de cet axe ou le long de l'autre ». Il n'y a pas d'axes dans le problème et pourtant…

[24] Une fois, Halmos a écouté ma conférence. Il n'est pas dans la théorie des ensembles (actuellement), il ne se tient pas au courant des progrès dans ce domaine et il ne connaît pas les concepts. Après ma conférence, il m'a dit : « Je n'ai rien compris, mais j'ai beaucoup apprécié votre exposé ». « Comment cela se fait-il ? » lui ai-je demandé. Et il m'a répondu : « Je ne connais pas les concepts, je ne sais pas ce qu'ils disent, mais la structure — comment ils se relient les uns aux autres - je l'ai très bien saisie. »

[25] les métaphores ontologiques les plus évidentes sont peut-être celles où l'objet physique est spécifié comme étant une personne

[26] une physionomie qui nous permet de la considérer comme une chose unique, aussi compliquée soit-elle, tout comme nous voyons le visage d'un homme

[27] Il y a, avant tout, un élément de personnification dans les concepts mathématiques... par exemple, hier, j'ai pensé à des coordonnées. (Je me suis dit) « cette coordonnée se déplace ici... et elle commande à celle-ci de faire ceci et cela ». Il y a des éléments d'animation. Ce n'est pas géométrique au sens d'images géométriques, mais on voit des gens qui bougent et qui se parlent.

[28] Quand je pense à un gros homme, je vois (dans mon esprit) un gros homme. Le modèle saturé me semble assez proche de cela, comme un homme rembourré.
[29] Imagerie trouble
[30] ... toute recherche mathématique m'oblige à construire un schéma, qui est toujours et doit être *de caractère vague* pour ne pas être trompeur
[31] Porteurs concrets
[32] Je peux comprendre un théorème ou une preuve à un niveau tel que je suis convaincu de sa validité. Je peux comprendre un théorème suffisamment pour le reproduire en classe. Tout cela n'est pas encore une preuve suffisante pour moi que j'ai vraiment compris. Il existe un autre niveau, dans lequel je peux prendre une preuve d'un théorème et prouver un autre théorème à l'aide des idées présentées dans cette preuve. Même dans ce cas, je pourrais toujours affirmer que je ne suis pas parvenu à une véritable compréhension de la preuve.
[33] J'ai mes résultats depuis longtemps, mais je ne sais pas encore comment je me rendrai à eux.
[34] Quand avez-vous le sentiment d'avoir vraiment compris quelque chose ? Ce n'est que lorsqu'on est parfaitement certain, sans avoir à vérifier, que les choses doivent être exactement comme elles sont. C'est comme dans le cas d'une familiarité intime avec une personne. Les choses (abstraites) ont leur vie propre, mais si vous les comprenez, vous faites des prédictions et vous êtes presque sûr que vous finirez par trouver ce que vous avez prévu. Comme une personne que vous connaissez et comprenez vraiment, (la construction mathématique) effectuera certaines opérations ou réagira d'une certaine manière à votre action. Cette intimité est exactement ce que j'avais en tête : vous savez ce qui va se passer sans faire de démarches formelles. Bien sûr, comme dans les relations humaines, on peut parfois se tromper !
[35] ... la compréhension n'est pas seulement une question de réflexion, à l'aide de propositions finitaires, sur une expérience préexistante et déterminée. Au contraire, *la compréhension est la façon dont nous « avons un monde », la façon dont nous faisons l'expérience de notre monde en tant que réalité compréhensible...* notre compréhension *est* notre façon « d'être dans le monde »... Nos actes de compréhension réflexifs plus abstraits (qui peuvent impliquer la saisie de propositions finitaires) sont simplement une extension de notre compréhension dans ce sens plus fondamental « d'avoir un monde ».
[36] lorsque vous me demandez si quelque chose est vrai ou non, je peux y réfléchir un instant... *trouver une similitude avec quelque chose d'autre...* et je peux sortir une réponse de ma manche. Et tout cela alors que je n'ai pas la moindre idée d'une preuve
[37] Lorsqu'on demande à des scientifiques de raconter l'histoire de l'origine d'un effort de recherche qu'ils considèrent comme innovant, ils se présentent régulièrement comme des raisonneurs analogiques qui fondent leur recherche « innovante » sur une similitude perçue entre des contextes de problèmes jusqu'alors sans liens.
[38] Comment Weil en est-il arrivé à ces conjectures ? Ce n'était pas de simples suppositions ; il avait de fortes raisons de penser qu'elles étaient valables. Elles « sentaient bon ». La raison était l'*analogie* avec la topologie.
[39] Les exemples ne font que m'embrouiller. Ils ne m'aident pas... J'ai parlé à des personnes de mon domaine qui croient au pouvoir des exemples. Les exemples m'intéressent aussi, parfois. De temps en temps, je me penche sur certains d'entre eux. Mais, à mon avis, si vous avez besoin d'exemples, c'est que vous devez être assez confus. Alors, comment suis-je arrivé à mes résultats ? (ML parlait de sa contribution spécifique à la théorie des modèles) C'est difficile à dire. Je pense qu'il m'a fallu deux ans avant d'arriver à l'image appropriée, et même alors, je n'avais pas de preuves complètes. Je ne pouvais pas le prouver à d'autres personnes. Mais j'ai regardé et j'ai vu des choses. J'avais une bonne perception de ce monde, je savais ce qui était plausible et ce qui ne l'était pas.
[40] ce choix est impérativement régi par le sens de la beauté scientifique
[41] Je pense qu'il y a là un élément esthétique... Il m'arrive de faire un certain « saut de pensée » uniquement parce que je me dis que pour que les choses soient belles, il faut qu'elles se comportent exactement de cette manière et d'aucune autre. Il faut que ce soit vrai de cette façon, sinon ce ne sera pas assez beau. Je dirais même que ce ne serait pas éthique si ce n'était pas le cas.
[42] ne voyait pas les mathématiques comme logiques mais comme des images. Ses idées étaient géniales, mais ses « preuves » étaient presque toujours incorrectes.
[43] le mathématicien typique est un platonicien en semaine et un formaliste le dimanche.
[44] Les mathématiciens débattent souvent à savoir si les mathématiques sont découvertes ou inventées. Dans ce cas précis, j'ai eu le sentiment de les découvrir et non de les inventer. Nous n'avons pas pu inventer tout cela. Nous avions découvert une structure qui devait exister. C'est du moins l'impression que j'ai eue ; tout s'emboîtait trop bien.
[45] Tout bien considéré, les mathématiciens devraient avoir le courage de leurs convictions les plus profondes et affirmer ainsi que *les formes mathématiques ont bien une existence indépendante de l'esprit qui les considère.*
[46] Il y a quelques années encore, j'étais prêt à déclarer que notre problème avec l'hypothèse du continuum était que nous n'avions pas formulé (compris) notre système de la bonne manière, c'est-à-dire d'une manière qui permette de le trancher dans un sens ou dans l'autre. Je ne pouvais pas tolérer l'indépendance de l'hypothèse du continuum parce que j'étais profondément convaincu que l'ensemble en question devait exister ou non.
[47] même un joueur d'échecs, s'il est vraiment engagé dans le jeu, ne peut pas penser qu'il ne fait que jouer... tout cela doit être réel.
[48] lorsque je traite (d'idées mathématiques), elles existent pour moi, que je puisse les justifier philosophiquement ou non.
[49] Je m'intéressais aux échecs. Je ne sais pas si j'étais un bon joueur, mais j'ai arrêté de jouer à un certain moment, lorsque j'ai réalisé que je devais les apprendre. Je sentais que le jeu était très intéressant, mais qu'il s'agissait d'une construction artificielle. Il n'y a pas de nécessité logique derrière ces règles. (En revanche) les théories mathématiques ne sont pas arbitraires. On les découvre vraiment. Vous essayez de les bouger et, après un certain temps, vous vous rendez compte que vous ne pouvez pas les formuler d'une manière substantiellement différente.
[50] Lorsque j'ai un nouveau concept, j'ai besoin d'une métaphore humaine. Une personnification du concept. Ou d'une métaphore spatiale. Une nouvelle métaphore de structure. Ce n'est qu'une fois que je l'ai que je peux répondre à des questions, résoudre des problèmes, effectuer des manipulations. Je ne peux faire cela que lorsque j'ai la métaphore.
[51] absolument générales et communes à tous les étudiants en recherche
[52] Après avoir eu de la difficulté pendant des années, j'ai fini par comprendre et tout a pris sa place. Tout s'est imbriqué d'une manière incroyable — chaque détail a trouvé sa place naturelle.
[53] Tout a pris sa place
[54] Tout s'est imbriqué et s'est mis en place !
[55] Ça se tenait
[56] chaque pièce avait son emplacement naturel
[57] Ce sont les discontinuités qui importent dans le processus d'apprentissage.

References

Albers, D.J. et Alexanderson. G.L. (1985) *Mathematical people: profiles and interviews.* Contemporary Books.

Cobb, P. (1985) Mathematical actions, mathematical objects, and mathematical symbols. *Journal of Mathematical Behavior* **4**(2), 127–134.

Cobb, P. (1990) A constructivist perspective on information-processing theories of mathematical activity. *International Journal of Educational Research* **14**(1), 67–92.

Cobb, P., Yackel, E. et Wood, T. (1992) A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* **23**(1), 2–33.

Davis, P.J. et Hersh, R. (1981) *The mathematical experience.* Penguin Books.

Dörfler, W. (1991) Meaning: image schemata and protocols. Dans Furinghetti, F. (dir.) *Proceedings of the Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, 17–33. PME 5.

Dreyfus, T. (1991) On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. Dans Furinghetti, F. (dir.) *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol 1, 32–48. PME 5.

Dubinsky, E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans Tall, D. (dir.) *Advanced Mathematical Thinking,* 95–123. Kluwer.

Fischbein, E. (1987) *Intuition in science and mathematics.* Reidel.

Freudenthal, H. (1980) *Weeding and sowing.* Reidel.

Greeno, J.G. (1991) Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education* **22**(3), 170–218.

Hadamard, J.S. (1949) *The psychology of invention in the mathematics field.* Princeton University Press.
Halmos, P. (1985) *I want to be a mathematician: an automathography in three parts.* MAA Spectrum.
Johnson, M. (1987) *The body in the mind: the bodily basis of meaning imagination, and reason.* The University of Chicago Press.
Kitcher, P. (1984) *The nature of mathematical knowledge.* Oxford University Press.
Knorr, K.D. (1980) The scientist as an analogical reasoner: a critique of the metaphor theory of innovation. Dans Knorr, K.D., Krohn, R. et Whitley, R. (dir.) *The social process of scientific investigation,* 25–52. Reidel.
Krutetskii, V.A. (1976) The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. University of Chicago Press.
Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.
Lakoff, G. (1987) *Women, fire and dangerous things: what categories reveal about the mind.* The University of Chicago Press.
Lakoff, G. et Johnson, M. (1980) *The metaphors we live by.* The University of Chicago Press.
Minsky, M. (1975) A framework for representing knowledge. Dans Winston, P.H. (dir.) *The psychology of computer vision.* 129–136 McGraw Hill.
Ortony, A. (Ed) (1979) *Metaphor and thought.* Cambridge University Press.
Pimm, D. (1987) *Speaking mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* Routledge & K. Paul.
Pimm, D. (1990) Certain metonymic aspects of mathematical discourse. Dans Booker, G., Cobb, P. et Mendicuti, T.N. (dir.) *Proceedings of the Fourteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, 129–136, PME 14.
Poincaré, H. (1920) *Science et Méthode.* Ernest Flammarion.
Presmeg, N. (1992) Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **23**(6), 595–610.
Putman, H (1988) *Representation and reality.* Bradford Books
Rorty, R (1979) *Philosophy and the mirror of nature.* Princeton University Press.
Searle, J.R. (1983) *Intentionality: an essay in the philosophy of mind.* Cambridge University Press.
Sfard, A. (1987) Two conceptions of mathematical notions: operational and structural. Dans Bergeron, J.C., Herscovics, N. et Kieran, C. (dir.), *Proceedings of the Eleventh Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, 162–169. PME 11.
Sfard, A (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* **22**(1), 1–36.
Sfard, A (1992) Operational origins of mathematical notions and the quandary of reification: the case of function. Dans Dubinsky E. et Harel, G. (Eds.) *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.* 59–84. MAA Monograph.
Sierpinska, A. (1994) *On understanding mathematics.* The Falmer Press
Stewart, I (1987) *The problems of mathematics.* Oxford University Press
Thom, R. (1971) Modern mathematics: an educational and philosophical error? *American Scientist* **59**, 695–699.