La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire

SONJA DE KEE, ROBERTA MURA, JEAN DIONNE

La trigonométrie a jusqu'à présent fait l'objet de peu de recherches didactiques comparativement à d'autres sujets mathématiques au programme du secondaire. Elle ne figure même pas dans l'index du *Handbook of research on mathematics teaching and learning* [Grouws, 1992, p. 761-771] Son apprentissage ne s'effectue pourtant pas sans difficulté. D'après Thérien *et al.* [1990], les erreurs commises par des élèves de collégial I lors de la résolution de problèmes trigonométriques sont nombreuses et variées. Les plus fréquentes relèvent, selon ces auteurs, d'« un concept connu, mais mal maîtrisé » [*ibid.*, p 6][1]: en d'autres termes, elles seraient imputables à une mauvaise compréhension, ou, tout au moins, à une compréhension incomplète du concept. Dix enseignants et enseignantes du secondaire nous ont confirmé que les notions les plus élémentaires de la trigonométrie, celles de sinus et de cosinus, posent déjà des problèmes à la plupart de leurs élèves, mais ils n'ont pas été en mesure de préciser la nature de ces difficultés. D'où notre intérêt pour la compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves de cinquième secondaire (onzième année) ayant terminé l'étude de la trigonométrie prévue à leur programme. Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement notre méthode de recherche pour ensuite présenter nos principales observations et les conclusions que nous en tirons.

1. Méthode

Avant de rencontrer les élèves, nous avons dû, bien sûr, préciser ce que nous entendons par « compréhension » et, plus particulièrement, par « compréhension des notions de sinus et de cosinus » et bâtir ensuite une série de tâches à soumettre aux élèves. Notre objet d'étude est *l'état* de la compréhension à un moment donné, plutôt que son développement.[2] Bien sûr, les échanges que nous avons eus avec les élèves ont pu déclencher des réflexions, des prises de conscience et, éventuellement, des transformations de leur état de compréhension, mais notre but n'était pas d'observer de tels changements et les tâches que nous leur avons soumises n'avaient pas été conçues pour en provoquer. Pour décrire la compréhension nous nous sommes servis d'une version modifiée du modèle, dit constructiviste, proposé par Herscovics et Bergeron [1982, p. 583-586].[3] Notre modèle comprend cinq composantes: la compréhension initiale, la compréhension procédurale, l'abstraction, la formalisation et la compréhension globale. La compréhension initiale concerne les connaissances préalables ainsi qu'une première familiarisation avec les notions visées; la compréhension procédurale a trait à l'acquisition de procédés pratiques, de « savoir faire », et à leur justification; l'abstraction correspond à un développement conceptuel pouvant faire intervenir la généralisation, la construction d'invariants logico-mathématiques ou la réversibilité et la composition de transformations et d'opérations logico-mathématiques; la formalisation se réfère à la maîtrise des diverses représentations (définitions formelles, symboles, graphiques, équations, ...) et à la capacité de raisonner sur les éléments de ces représentations et d'établir des liens entre elles; la compréhension globale, enfin, fait appel à l'intégration structurée de toutes les connaissances acquises et reflète la conception que l'élève possède des notions en cause.

Ce modèle nous a servi de guide dans la formulation de critères de la compréhension des notions de sinus et de cosinus dans deux contextes distincts, celui du triangle rectangle et celui du cercle trigonométrique.[4] Par exemple, un des critères correspondant à la composante de l'abstraction, dans le contexte du triangle rectangle, se lit comme suit: « Reconnaître l'invariance des rapports trigonométriques par rapport à la taille du triangle: les rapports trigonométriques demeurent invariants si le triangle subit une réduction ou un agrandissement ». Nous appuyant sur ces critères, au nombre de vingt-deux pour chacun des deux contextes, nous avons produit un ensemble de cent vingt-et-une tâches à soumettre aux élèves.[5] Pour certaines tâches les élèves pouvaient se servir d'une règle, d'un compas, d'une ficelle et de papier quadrillé, mais jamais l'usage de rapporteur, de calculatrice ou de tables trigonométriques n'a été autorisé.

Les résultats rapportés dans la suite proviennent d'entretiens avec cinq élèves de cinquième secondaire appartenant à une même classe. La titulaire de cette classe était une enseignante d'expérience, auteure d'un cahier d'exercice publié commercialement, cahier qu'elle utilisait d'ailleurs avec ses élèves. Nous avons rencontré chacun des cinq élèves à deux reprises; la première rencontre a porté sur le contexte du triangle rectangle et la seconde, sur celui du cercle trigonométrique. La durée des rencontres a varié entre soixante-dix et cent minutes. Tous les entretiens ont été enregistrés et transcrits intégralement. Les rencontres ont eu lieu vers la fin de l'année scolaire, en mai et juin, lorsque l'enseignement de la trigonométrie venait tout juste de s'achever, ce qui, nous le verrons, a pu affecter certaines réponses des élèves. Des cinq élèves, deux, Anne[6] et Luc, étaient classés parmi les « faibles » par leur enseignante, un troisième, Paul, était considéré « moyen » et les deux dernières, Claire et Berthe, étaient jugées « fortes ».

Notons enfin que nous avons commencé chaque entrevue par les tâches concernant la compréhension globale, car c'est pour celles-ci que les réactions étaient les plus susceptibles d'être influencées par l'expérience des autres tâches. Par ailleurs, lors du premier entretien, nous n'avons pas informé les élèves du fait que celui-ci portait surtout sur le contexte du triangle rectangle. En effet, dans certaines tâches, spécialement dans la section sur la compréhension globale, une flexibilité dans le choix du contexte était souhaitable et nous avons aussi voulu éviter d'orienter les réponses en fixant trop précisément le contexte de référence

2. Résultats

La quantité imposante et la nature des données recueillies empêchent de faire ici une présentation exhaustive des résultats. Nous avons choisi ceux qui nous apparaissent les plus intéressants tout en demeurant représentatifs de l'ensemble des propos tenus par les élèves. Nous nous sommes aussi limités aux données les plus complètes et les moins ambiguës, car, il faut l'avouer, quelques questions n'ont pas été posées de façon systématique aux cinq élèves et nous n'avons pas toujours insisté suffisamment pour obtenir une explication de certaines réponses — des erreurs d'entrevue regrettables, mais difficilement évitables lorsqu'on veut aborder cent vingt-et-une tâches en deux séances ... Enfin, nous avons donné une place relativement plus importante aux résultats concernant la compréhension globale, car ceux-ci se prêtent mieux que les autres à une présentation synthétique

2.1 Le contexte du triangle rectangle

Dans le contexte du triangle rectangle, le sinus et le cosinus sont définis pour les angles aigus entre 0° et 90° Si l'angle dont on cherche le sinus ou le cosinus ne fait pas déjà partie d'un triangle rectangle, il faut d'abord construire un tel triangle Le sinus est alors le rapport de la mesure du côté opposé à l'angle à celle de l'hypoténuse et le cosinus, celui de la mesure du côté adjacent à celle de l'hypoténuse. Ces rapports ne dépendent pas du triangle rectangle particulier qui a été construit. De plus, en tant que rapports de deux mesures de longueurs, le sinus et le cosinus sont des nombres « purs », sans unité de mesure.

Les élèves que nous avons interrogés avaient été exposés à cette matière en quatrième secondaire, c'est-à-dire plus d'un an avant que nous les rencontrions

2.1.1 *La compréhension globale* Une de nos premières questions invitait les élèves à préciser comment ils expliqueraient à un ami qui commence l'étude de la trigonométrie ce qu'est un *rapport* trigonométrique Luc, Paul et Berthe ont pensé, comme nous nous y attendions, au rapport entre deux côtés d'un triangle rectangle Luc a présenté ce concept dans l'esprit d'une activité: « un rapport ce serait un côté par rapport à un autre pour trouver quelque chose, ça dépend ce que tu cherches ». Pour Anne et pour Berthe, le mot « rapport » a évoqué l'idée d'égalité, comme s'il signifiait ce qu'on nomme habituellement une proportion. De plus, l'adjectif « trigonométrique » ne semblait pas contribuer de manière importante au sens qu'elles donnaient à l'expression « rapport trigonométrique » Voici un extrait de l'entrevue avec Anne

Anne: [Un rapport trigonométrique] c'est comme deux fractions équivalentes

Sonja: Donc, pour toi un rapport trigonométrique c'est la même chose que deux fractions équivalentes ?

Anne: Oui [Elle écrit « 3/6 = 4/8 »] c'est égal à quatre huitièmes

Sonja: Donc d'après toi c'est un rapport trigonométrique ?

Anne: .. Ça fait penser à ça

Sonja: Qu'est-ce que tu veux dire, ça fait penser à ça ?

Anne: C'est que quand . Ça donne une demie, ça fait que . Avec le sinus et le cosinus ..

Sonja: Peux-tu m'expliquer ce que serait un rapport trigonométrique ? Tu viens de mentionner le sinus, mais je ne vois pas de sinus ici

Anne: Mettons le côté a sur le sinus de A, le côté b sur le sinus de B [en écrivant « a/sinA° = b/sinB° »]

Anne: Un rapport c'est une comparaison entre deux

Sonja: Quelle sorte de comparaison ?

Anne: Il faut que les deux soient égaux

L'échange suivant a eu lieu avec Berthe après qu'elle eut indiqué que pour expliquer ce qu'est un rapport trigonométrique elle dessinerait deux triangles rectangles semblables, elle calculerait le sinus de deux angles aigus correspondants et elle constaterait qu'il s'agit du « même rapport ».

Sonja: Dans quelles conditions ou dans quel contexte parles-tu d'un rapport trigonométrique ?

Berthe: Bien, d'après moi, je pense que c'est Mettons pour deux cercles [.] le rapport des rayons carrés va être égal au rapport des aires [Elle écrit: « $(r_1/r_2)^2 = A_1/A_2$ »]

Sonja: Alors, dans ce cas, tu parles aussi d'un rapport trigonométrique ?

Berthe: Oui, c'est un rapport si je dis que le rayon du premier sur le rayon du deuxième puis tout ça au carré c'est égal à l'aire du premier sur l'aire du deuxième

Sonja: Donc pour toi c'est aussi un rapport trigonométrique ?

Berthe: Oui

Nos questions concernant les unités des rapports trigonométriques ont mis tous les élèves dans l'embarras. Elles étaient formulées ainsi: « Comment exprimes-tu un rapport trigonométrique ? Certains élèves pensent qu'on exprime un rapport trigonométrique en centimètres et d'autres pensent qu'il faut utiliser des degrés. Qu'est-ce que tu en penses ? ». Anne a d'abord proposé des « centimètres sur degrés », puis, se ravisant, elle a dit que le sinus n'avait pas d'unité, sans pouvoir expliquer pourquoi: « je ne sais pas [pourquoi], j'ai appris ça comme ça ». Luc a été surpris de la question: « je [ne] me suis jamais arrêté là dessus, c'est une bonne question ». Après avoir été amené à observer qu'un certain sinus était le rapport de neuf centimètres sur dix centimètres, il a conclu que la réponse « devrait être des centimètres », mais il a admis en être plus ou moins sûr et il a commenté: « d'habitude je fais ça vite sur la calculatrice tout le temps, c'est niaiseux, c'est la première fois que je m'arrête à penser c'est quoi vraiment ». Paul a dit tout de suite qu'il lui semblait qu'« un rapport, [.] le sinus et le cosinus puis tout cela » n'avaient pas d'unité, mais son argument était qu'en général aucun rapport n'a d'unité, « parce qu'on peut mettre n'importe quoi sur n'importe quoi ». Les deux élèves considérées « fortes » ne s'en sont pas tirées beaucoup mieux Claire a commencé par opter pour les degrés, pour finir par avouer qu'elle ne savait pas. Quant à Berthe, au début elle croyait qu'on pouvait prendre soit les centimètres soit les degrés. Après avoir travaillé sur un exemple et avoir trouvé un sinus de 4/5 comme rapport de quatre centimètres sur cinq centimètres, elle a dit: « je ne mettrais pas d'unité, je pense Pour les rapports on n'en mettait pas d'unité, il me semble ». « Des fois — a-t-elle ajouté — je me pose des questions au niveau comme dans les rapports comme 3/2 admettons, mais ils ne mettent pas d'unité, je ne pense pas, mais en cas où ils en mettraient, je comprendrais pareil »

Quand nous leur avons présenté le dessin d'un angle aigu faisant partie d'un triangle rectangle, tous les élèves ont utilisé correctement la définition pour trouver le sinus et le cosinus de cet angle (côté opposé, ou côté adjacent, sur l'hypoténuse). Par contre, face à un angle aigu tout seul, personne n'a trouvé un moyen d'évaluer son sinus Anne, Claire et Berthe ont complété le dessin de façon à obtenir un triangle acutangle; par la suite Berthe n'a pas su comment poursuivre, tandis qu'Anne a fait appel à la « loi des sinus »[7], un théorème vu récemment en classe qui ne permet pas de résoudre ce problème car il amène à une équation qui contient deux inconnues. Claire a commencé par calculer le sinus comme le rapport du côté opposé à l'angle et du côté le plus long du triangle, côté qu'elle a appelé « hypoténuse »; lors d'un deuxième exemple, elle a reconnu son erreur et elle a tenté, comme Anne, de recourir à la loi des sinus. Luc a complété le dessin de façon à obtenir un triangle rectangle, mais il a employé quand même lui aussi la loi des sinus plutôt que la définition du sinus Paul a commencé par calculer le rapport de la mesure des deux côtés de l'angle, tels qu'ils apparaissaient dans le dessin, en les appelant l'un « côté adjacent » et l'autre, le plus long, « hypoténuse » Lors d'un deuxième exemple, il s'est aperçu qu'il avait confondu le sinus et le cosinus; il a alors complété le dessin de façon à obtenir un triangle acutangle et il a calculé le sinus comme le rapport du côté opposé sur l'« hypoténuse ». Plus tard il a admis ne pas se souvenir si l'on pouvait procéder de cette façon lorsque le triangle n'était pas rectangle.

Dans la même série de tâches, nous voulions savoir comment les élèves trouveraient le sinus et le cosinus d'un angle droit, s'ils en oubliaient la valeur Anne a dit que pour le sinus on pouvait « faire le côté opposé sur l'hypoténuse, là l'hypoténuse c'est la même chose que le côté opposé, ça fait un » — un procédé erroné déjà observé par Thérien *et al* [1990] (voir Note 1). Pour le cosinus, elle a proposé la loi des cosinus, parce qu'elle ne savait pas lequel des deux côtés adjacents il fallait prendre Luc, Paul et Berthe ont procédé comme Anne pour le sinus. Les deux garçons ont ressenti initialement un certain malaise, mais ils l'ont surmonté en constatant que cette façon de faire produisait la bonne réponse. Luc a même adopté le procédé analogue pour le cosinus, malgré les deux choix possibles pour le côté adjacent: « le cosinus, c'est le côté adjacent, à l'aide de l'un ou l'autre, par l'hypoténuse » Pour Paul et pour Berthe, comme pour Anne, la présence de deux côtés adjacents a signalé l'impossibilité de procéder de cette manière Claire a songé d'abord aux lois des sinus et des cosinus, mais quand nous lui avons soumis l'idée des autres élèves, elle ne l'a pas rejetée, du moins dans le cas du sinus Pour le cosinus elle a remarqué qu'« un côté ou l'autre ça va faire un rapport différent. Je ne sais pas si ça marcherait. Je n'ai jamais essayé »

2 1 2 *La compréhension initiale*. En répondant à nos questions concernant la compréhension initiale, tous les élèves se sont montrés très familiers avec les notions préalables de triangle rectangle, d'angle droit, d'angle aigu, de côté opposé et de côté adjacent à un angle aigu faisant partie d'un triangle rectangle.[8] Ils disposaient aussi, du moins de façon intuitive, des notions de translation, de rotation, de réflexion, d'agrandissement et de réduction, de triangles rectangles semblables et d'angles correspondants dans ces triangles Ils savaient également produire à bon escient les expressions symboliques « $\sin A = a/b$ » et « $\cos A = c/b$ » Par contre, pour deux élèves, Anne et Paul, l'hypoténuse était le côté le plus long *dans n'importe quel triangle*.[9] Une troisième élève, Claire, hésitait à dire s'il existait ou non d'hypoténuse dans un triangle obtusangle Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette généralisation abusive a induit Paul et Claire à tenter d'appliquer la définition des rapports trigonométriques à des triangles qui n'étaient pas rectangles

2.1 3 *La compréhension procédurale* Concernant la compréhension procédurale, lorsque nous avons fourni aux élèves le dessin d'un triangle rectangle et une règle, tous on su trouver, sous forme de fraction, le sinus et le cosinus d'un des angles aigus du triangle; cependant trois des cinq élèves, Anne, Paul et Claire, se sont avoués incapables de transformer les fractions 3/5 et 4/5 en nombres à virgule sans l'aide d'une calculatrice À l'inverse, à partir d'un sinus donné sous forme de fraction et en se servant d'une règle et de papier quadrillé, tous sauf Paul ont pu construire des triangles rectangles comportant un angle ayant le sinus donné. Plus tard, lorsque nous leur avons proposé un sinus égal à 0,6, trois élèves ont été capables de dessiner l'angle correspondant en commençant par transformer 0,6 en fraction Anne et Paul n'ont pas pensé spontanément à effectuer cette transformation; après que nous leur en ayons fait la suggestion, Anne a réussi la tâche, mais non Paul. Personne n'a songé à considérer 0,6 comme le rapport de 0,6 sur 1

2.1 4 *L'abstraction* Pour ce qui est de l'abstraction, les cinq élèves savaient qu'il existe une et une seule valeur pour le sinus d'un angle donné et qu'inversement, à une valeur donnée du sinus (entre 0 et 1) correspond un et un seul angle aigu, même si Paul ne connaissait pas de moyen autre que la calculatrice ou « le tableau » pour trouver l'angle à partir de son sinus. Tous se sont montrés conscients de l'invariance du sinus et du cosinus d'un angle faisant partie d'un triangle rectangle lorsque ce triangle subit une translation, une rotation ou une réflexion. Tous sauf Paul se rendaient compte également de l'invariance de ces sinus et cosinus lorsque le triangle était agrandi ou réduit Paul, au contraire, pensait que lorsqu'on agrandissait ou l'on réduisait les côtés du triangle d'un facteur de 3, le sinus et le cosinus variaient proportionnellement et ce, tout en affirmant que l'angle ne changeait pas. Tout de suite après, Paul s'est cependant contredit en déclarant, comme les autres élèves, qu'un angle ne peut avoir qu'un seul sinus (ou cosinus), éventuellement exprimé sous forme de fractions différentes, mais équivalentes Un peu plus tard, il reconnaissait, en général, que les angles correspondants dans deux triangles rectangles semblables ont le même sinus parce que « la mesure des côtés sont semblables, donc les rapports des sinus seraient semblables ou équivalents, ça fait que le rapport ça serait le même », mais face à un exemple précis sa conception erronée refaisait surface: à partir d'un sinus égal à 0,8, il arrivait, dans un triangle de dimensions doubles, à un sinus égal à 1,6, valeur qui lui semblait pourtant inacceptable car supérieure à 1.

2.1.5 *La formalisation.* Le protocole d'entrevue ne comportait pas de tâches spécifiques à la formalisation Cette forme de compréhension était évaluée d'après le comportement des élèves au cours de toutes les autres tâches Dans le contexte du triangle rectangle, le symbolisme trigonométrique n'est pas très élaboré et nous avons constaté que les élèves l'employaient correctement Quant à la définition formelle du sinus et du cosinus, les élèves savaient l'énoncer et l'appliquer au cas des angles aigus faisant partie d'un triangle rectangle, mais parfois, comme nous l'avons indiqué, ils l'ont appliquée aussi en dehors de son domaine de validité: pour trouver le sinus (et même le cosinus) d'un angle droit ou pour trouver le sinus ou le cosinus d'un angle appartenant à un triangle qui n'était pas rectangle. De plus, les élèves n'ont pas songé à s'en servir, ou n'ont pas su comment le faire, pour trouver le sinus d'un angle non intégré à un triangle À quelques occasions, cependant, ils ont été capables de raisonner sur la définition pour déduire des propriétés des rapports trigonométriques. Voici, par exemple, dans les mots de Luc et de Berthe, le genre d'argument que tous les élèves sauf Paul ont avancé lorsqu'ils ont conclu, en comparant les sinus et cosinus de deux angles, que l'angle plus grand avait un sinus plus grand, mais un cosinus plus petit: « ce serait celui-ci qui serait [...] plus grand à cause de l'hypoténuse qui est plus petite» et « la mesure de AB [le côté adjacent] ne changera pas, mais la mesure de l'hypoténuse va changer; un chiffre divisé par un [plus] grand chiffre ça fait un plus petit rapport »

2.2 Le contexte du cercle trigonométrique

Dans le contexte du cercle trigonométrique (un cercle centré à l'origine d'un plan cartésien et ayant un rayon de longueur égale à un), le sinus et le cosinus ont été présentés aux élèves qui ont participé à notre recherche comme des fonctions réelles de variable réelle définies au moyen de la « fonction d'enroulement » Pour obtenir la fonction d'enroulement, il faut considérer une droite numérique située verticalement dans le plan cartésien, orientée vers le haut et ayant pour origine le point (1, 0). La droite est donc tangente au cercle trigonométrique en ce point. En imaginant d'« enrouler » la droite autour du cercle tout en maintenant fixe le point (1, 0), on établit une correspondance univoque entre les points de la droite et ceux du cercle trigonométrique À l'aide de cette correspondance entre points, on définit la fonction d'enroulement comme la fonction qui associe à un nombre réel s le couple de nombres réels (x, y) constitué des coordonnées du point du cercle correspondant par « enroulement » au point de la droite associé au nombre s. Enfin, on définit le sinus du nombre s comme étant le nombre y et le cosinus de s comme x.

Lorsque le nombre s est positif et plus petit de $\pi/2$, le point (x, y) se trouve dans le premier quadrant du cercle et, en considérant le triangle rectangle de sommets (0, 0), $(x, 0)$ et (x, y), on constate que la nouvelle définition du sinus et du cosinus coïncide avec la définition déjà vue dans le contexte du triangle rectangle: en effet, l'hypoténuse de ce triangle (un rayon du cercle) ayant une longueur égale à un, les longueurs des deux côtés, x et y, sont le sinus et le cosinus de l'angle aigu au centre du cercle et s est la mesure de cet angle en radians (ainsi que la mesure de l'arc de cercle allant du point (1, 0) au point (x, y)). De plus, la nouvelle approche étend les notions de sinus et de cosinus à des angles pouvant mesurer plus de 90°, voire plus de 360°, et ayant une orientation positive ou négative.

2.2.1 *La compréhension globale.* La toute première tâche que nous avons soumise aux élèves lors de la seconde entrevue concernait la compréhension globale et consistait à dire comment ils expliqueraient à un ami ce qu'est une *fonction* trigonométrique. L'idée de fonction trigonométrique avait déjà été touchée lors de l'entrevue précédente, lorsque nous avions proposé aux élèves une table trigonométrique (donnant la valeur du sinus pour cent quatre-vingts angles mesurés en degrés et dixièmes de degré et allant de 0.0 à 17.9) et nous leur avions demandé si un tel tableau représentait une fonction trigonométrique Nous présentons ici l'une après l'autre les réactions des élèves à ces deux tâches.

Luc a vu dans le tableau cent quatre-vingts fonctions plutôt qu'une seule: « chaque ligne ce serait une fonction » Berthe aussi croyait que le tableau pourrait représenter plusieurs fonctions. Pour Paul, le tableau ne représentait pas une fonction trigonométrique « parce que dans une fonction trigonométrique il faut qu'il y ait une variable ». Anne et Claire ont été les seules à penser que le tableau représentait une fonction, leur explication tenait au fait qu'à partir du tableau « on serait capable de faire un graphique » (Anne), ou, comme a dit Claire: « le degré ce serait la valeur des x, puis le sinus ce serait la valeur des y, puis ça pourrait faire comme une courbe qui monte ».

Pour expliquer à un ami ce qu'est une fonction trigonométrique, Luc et Paul se sont placés dans le contexte du triangle rectangle et ont défini (correctement) le sinus d'un angle. Paul nous a dit qu'il ne faisait pas de différence entre le sinus comme rapport trigonométrique et le sinus comme fonction trigonométrique. Selon Luc, « la fonction trigonométrique c'est l'ensemble, le cosinus, le sinus, toutes ces choses-là, puis le rapport trigonométrique ce serait soit juste le sinus ou le cosinus ». Pour Anne, Claire et Berthe, l'expression « fonction trigonométrique » a évoqué l'idée de graphique Anne s'est exprimée ainsi: « C'est une équation dans laquelle il y a des sinus ou des cosinus et que tu peux faire un graphique, ou bien c'est une formule pour aider à résoudre des problèmes ». Pour donner un exemple elle a dessiné le graphique de la fonction sinus et elle a écrit « $f(x)$ = sin ». Claire s'est limitée à parler de graphique et elle a dessiné celui de la fonction sinus. Quant à Berthe, elle a également évoqué tout de suite le graphique, mais son premier exemple a été celui d'une parabole, ce qui a déclenché le dialogue suivant

Sonja:	C'est une fonction trigonométrique pour toi ?
Berthe:	Je pense que oui
Sonja:	Oui ?
Berthe:	Bien, on peut varier les y en fonctions des x .
Sonja:	Qu'est-ce qui fait que c'est une fonction trigonométrique ?
Berthe:	Bien, je ne sais pas Ce n'est peut-être pas une fonction trigonométrique celle-là. Je sais que c'est une fonction, mais les fonctions trigonométriques . Admettons, le cercle là c'est une fonction trigonométrique
Sonja:	Le cercle ?
Berthe:	C'est à cause que c'est une forme, je pense Il y a des ellipses, des hyperboles, .
Sonja:	Ce sont toutes des fonctions trigonométriques ?
Berthe:	Oui Plus que la parabole, je pense, mais je sais que la parabole c'est une fonction, mais peut-être pas trigonométrique.

Puisqu'aucun des élèves, dans son explication de l'idée de fonction trigonométrique, n'avait fait référence à la fonction d'enroulement, nous leur avons demandé comment ils expliqueraient, toujours à un ami, ce qu'est cette dernière. Ils en ont fourni des descriptions plus ou moins exactes, mais ce qui nous a le plus étonnées c'est qu'une seule élève, Claire, a reconnu l'existence d'un lien entre fonction d'enroulement et fonction trigonométrique Anne a dit ne pas savoir si un tel lien existait; Luc pensait qu'il n'y en avait pas « à cause que la trigonométrie ça va avec le sinus et le cosinus, puis pour travailler ça prend un triangle rectangle. Puis ici c'est la fonction d'enroulement, d'après moi, c'est autour d'un cercle » Selon Paul, le seul lien entre la fonction d'enroulement et une fonction trigonométrique était le cercle trigonométrique, mais il a ajouté ne pas connaître « le rapport entre les deux ». Même pour une élève « forte » comme Berthe, il n'y avait pas grand lien entre ces deux types de fonction, à part le fait que dans les deux il y avait des radians: « ça a un peu rapport avec les mêmes affaires, mais pas bien bien. On les a fait tout le temps à part »

Pour terminer la série de questions portant sur la compréhension globale, nous avons demandé aux élèves pourquoi, d'après eux, on enseignait les fonctions trigonométriques. Selon Anne, c'était « pour développer le cerveau »; elle a ajouté qu'elle ne voyait pas à quoi ça allait lui servir plus tard. Luc a reconnu la résolution des triangles comme le but de la trigonométrie: « Ça serait, je ne sais pas, pour approfondir nos connaissances par rapport au triangle. Pour trouver, à l'aide des fonctions trigonométriques ... Supposons que t'as un triangle, qu'il te manque des angles ou quelque chose comme ça, que tu peux réussir à combler les manques, . ». Claire a avoué ne pas savoir pourquoi on enseignait les fonctions trigonométriques et Berthe a dit n'en avoir « aucune idée. Je ne sais pas à quoi ça va nous servir [...] peut-être pour des statistiques. Je ne sais pas à quoi ça va nous servir dans la vie » Nous avons oublié de poser cette question à Paul, mais, au cours de l'entrevue précédente, il avait eu l'occasion de remarquer que « dans la vie courante c'est bien rare que j'ai l'occasion de parler d'un rapport trigonométrique ».

2.2.2 *La compréhension initiale* À propos de la compréhension initiale, étant donné que le sinus et le cosinus sont présentés, dans le contexte du cercle trigonométrique, comme des fonctions réelles de variable réelle, les notions préalables devraient inclure celles de fonction et de nombre réel. Bien entendu, puisqu'il s'agit de notions fort complexes, dont l'enseignement se poursuit jusqu'à l'université, on ne peut s'attendre à ce que des élèves de cinquième secondaire en aient une conception très évoluée, mais ils devraient en avoir quand même une connaissance rudimentaire afin de pouvoir « comprendre » les fonctions trigonométriques. Or, pour ce qui est du concept de fonction, les propos rapportés plus haut montrent que Luc, Paul et Berthe ont des idées erronées à ce sujet: un tableau représenterait *plusieurs* fonctions (Luc et Berthe) ou ne représenterait pas de fonction (Paul), *une* fonction serait *l'ensemble* du sinus, du cosinus et d'autres choses encore (Paul) et, enfin, le cercle et l'ellipse seraient des exemples de fonctions (Berthe) Plus tard dans l'entrevue, Paul et Berthe ont reconnu également comme fonction une courbe obtenue en faisant subir au graphique du sinus une rotation de 90°, c'est à dire une courbe qui associe chaque valeur de x entre -1 et $+1$ à une infinité de valeurs de y. Anne aussi, après avoir hésité, a admis que cette courbe pourrait représenter la fonction sinus.

Le mot fonction a donc principalement évoqué chez les élèves l'idée de courbe ou de graphique (Anne, Claire et Berhe), mais aussi l'idée de formule, d'équation et de variables (Anne, Paul, Claire). Nous avons également observé la présence d'images plus proches de la définition usuelle. Par exemple, pour Anne, une fonction « c'est que si tu donnes une valeur à ton x là, ça va faire que ça va donner un y » Tous les élèves savaient, du moins implicitement, ce que sont le domaine et l'image d'une fonction, mais il leur arrivait, en cours d'action, de confondre les deux (par exemple, pour trouver un nombre s tel que sin s = 0,7, le premier réflexe de Claire a été de considérer un arc de longueur 0,7) Tous les élèves avaient également une connaissance pratique des notions de périodicité et de croissance ou décroissance d'une fonction et, à l'exception de Luc, de zéro d'une fonction. Par contre, certains n'ont pu formuler une définition de ces concepts et ceux et celles qui l'ont fait ont eu tendance à décrire une action, un processus, plutôt qu'un concept, comme l'illustrent les exemples suivants: « une fonction périodique, il y a une période, ça veut dire qu'il arrive quelque chose par période, ça revient tout le temps » (Berthe); « [une fonction est décroissante] quand la courbe baisse » (Claire); « le zéro d'une fonction, c'est quand le y vaut zéro » (Anne).

Quant aux nombres réels, c'était, pour Paul, Claire et Berthe, l'ensemble de tous les nombres: « tout, n'importe quoi » Berthe savait aussi que les « rationnels [...] c'est des fractions, mais irrationnels c'est que ça ne finit pas » Paul et Claire ont avoué ne pas se souvenir de ce qu'étaient les rationnels et les irrationnels ou de la différence entre les deux. Anne a été capable de donner des exemples de nombres rationnels sous forme de fraction et de nombre à virgule, mais elle a reconnu ne pas savoir ce qu'était un nombre irrationnel ou réel. Plus tard, toutefois, elle a introduit spontanément l'expression « les réels » pour décrire le domaine de la fonction sinus, en précisant qu'il s'agissait de « toutes les valeurs que pourrait prendre x » Luc n'a pas eu l'occasion de s'exprimer sur ces questions.

Concernant une notion préalable plus simple, celle de cercle trigonométrique, deux élèves seulement, Anne et Paul, ont su en reconnaître un dans une série de dessins de cercles dans un plan cartésien. Pour Claire, tout cercle centré à l'origine du plan était un cercle trigonométrique, peu importe la longueur de son rayon, mais elle a ajouté, à propos d'un tel cercle de rayon 2, qu'on obtiendrait « comme deux sin de quelque chose » À un autre moment, au cours de la même entrevue, en travaillant avec un cercle trigonométrique tracé sur du papier quadrillé et dont le rayon mesurait dix « carrés », elle n'a pas hésité à utiliser cette unité de mesure pour évaluer un sinus et n'a pas sourcillé en obtenant une valeurs de « 8 5 » Berthe a commencé par retenir, comme Claire, tous les cercles centrés à l'origine, mais a fini par conclure que n'importe quel cercle était un cercle trigonométrique, puisque « c'est juste des cercles qui sont translatés » Selon Luc, enfin, les cercles trigonométriques étaient ceux qui « touchaient aux quatre axes » et qui « faisaient les quatre quadrants », c'est-à-dire ceux qui intersectaient les deux axes: « [un cercle trigonométrique] c'est un cercle sur l'axe des x et des y en même temps, puis son centre peut varier, il peut être soit à zéro, il peut se tasser »

Nous avons examiné la compréhension initiale que les élèves avaient de la définition du sinus dans le contexte du cercle trigonométrique en leur présentant le dessin d'un tel cercle et en leur demandant de définir le sinus à l'aide de ce dessin. Anne, Luc et Paul n'ont pas su le faire. Claire et Berthe ont parlé du sinus et du cosinus *d'un point* du cercle trigonométrique comme étant ses coordonnées. Elles n'ont toujours pas fait intervenir la fonction d'enroulement

2.2 3 *La compréhension procédurale.* Une tâche semblable à la précédente visait la compréhension procédurale de la même définition. Cette fois-ci, en plus du dessin d'un cercle trigonométrique sur papier quadrillé, nous avons fourni aux élèves une règle et une ficelle et nous leur avons demandé de trouver la valeur approximative du sinus du nombre 2. À nouveau, Anne, Luc et Paul n'ont pas su quoi faire. Claire et Berthe ont situé « le point » 2 sur le cercle en estimant visuellement sa position par rapport aux « points » $\pi/2 = 1{,}57$ et $\pi = 3{,}14$ dont elles connaissaient par coeur la position. Elles ont ensuite évalué les coordonnées du « point » 2 en se servant du quadrillage. À cette étape, aucun des élèves ne s'est servi de la ficelle que nous leur avions fournie pour mesurer un arc de longueur 2 et situer le point correspondant de façon plus précise.

2 2 4 *L'abstraction et la formalisation* Vu l'état embryonnaire de la compréhension initiale et procédurale chez les cinq élèves, il était risqué de vouloir tirer des conclusions sur le développement chez eux de l'abstraction et de la formalisation. Nous avons quand même poursuivi l'entrevue et nous leur avons proposé quelques tâches touchant ces deux composantes. Tous les élèves ont admis, à quelques nuances près, qu'on peut trouver le sinus de « n'importe quel nombre réel » et que ce sinus est unique. Bien entendu, l'expression « sinus d'un nombre réel » est la nôtre, les élèves préférant parler du sinus d'un angle ou d'un point. Paul s'est montré prudent concernant l'existence du sinus et du cosinus de n'importe quel nombre réel: « probablement, peut-être, mais peut-être il y a des restrictions quelque part ... ».

Un des indices du développement de la formalisation que nous avons voulu observer était la familiarité avec la notation symbolique et sa signification. Trois des élèves, Anne, Luc et Paul, nous sont apparus mal à l'aise dans leur emploi des symboles. Anne, par exemple, a écrit à deux reprises, lors de tâches distinctes, l'équation de la fonction sinus comme « $f(x) = \sin$ », avant de l'écrire correctement lors d'une troisième tâche. À une autre occasion, après avoir répondu que si le cosinus de s était égal à x, le cosinus de $(s - 20\pi)$ serait aussi égal à x, elle s'est dite incapable d'exprimer cette propriété à l'aide de symboles ou d'une équation, et ce malgré que nous lui ayons déjà fourni par écrit les expressions « $\cos s$ » et « $\cos (s - 20\pi)$ » Quant à Luc, invité, à deux occasions distinctes, à écrire les équations correspondant aux graphiques des fonctions sinus et cosinus, tout ce qu'il a su produire a été « sin: x » et « cos: x » Prié de prédire la valeur du sinus de $(\pi - s)$ en sachant que le sinus de s vaut y, Paul s'est montré impuissant à raisonner sur ces variables: « il faudrait que y soit égal à quelque chose, qu'il vaille quelque chose, un chiffre . ». Lorsque nous lui avons démandé de prédire la valeur du sinus de $(s + 8\pi)$, toujours en sachant que le sinus de s vaut y, il a eu une réaction semblable: « "$\sin s = y$" [expression que nous lui avions fournie par écrit et verbalement] ça ne me dit pas grand chose qui puisse m'aider à le placer [sur le cercle trigonométrique], je n'ai pas de chiffre .. » Le malaise de Paul face aux variables s'est manifesté à nouveau lorsqu'il a identifié le x et le y du couple (x, y) des coordonnées d'un point trigonométrique avec le domaine et l'image de la fonction sinus — probablement une confusion avec le sens habituellement attribué à ces lettres dans la représentation du sinus sous forme de l'équation « $y = \sin x$ ». Le même élève s'est avoué incapable d'écrire les équations correspondant aux graphiques des fonctions sinus et cosinus: « ça doit être sin de x égale quelque chose et ici cos de x égale je ne sais pas quoi . . [en écrivant "$\sin x =$" et "$\cos x =$"] ».

Les deux élèves « fortes » manipulaient les symboles avec plus de facilité, mais même Berthe n'a pas su expliquer le lien qui intervient entre le graphique et l'équation de la fonction sinus (ou cosinus) et, lors d'une autre tâche, elle a affirmé qu'« il n'y a pas d'équation » pour exprimer le fait que le cosinus de 1,57 est égal au cosinus de $(1{,}57 + 2\pi)$.

3. Discussion

Les entretiens que nous avons eus avec Anne, Luc, Paul, Claire et Berthe ont confirmé qu'au terme de leur programme de trigonométrie des élèves, des « forts » comme des « faibles », peuvent éprouver encore des difficultés avec les notions les plus élémentaires de cette branche des mathématiques, soit le sinus et le cosinus. Nous sommes maintenant en mesure de décrire avec une certaine précision la nature, parfois surprenante, de quelques-unes de ces difficultés.

Au cours des deux entrevues, quatre représentations des notions de sinus et cosinus sont le plus souvent apparues chez les élèves:

- un procédé qui consiste à diviser l'une par l'autre les longueurs de deux côtés d'un triangle (rectangle) et qui produit le sinus ou les cosinus d'un angle (aigu) Parfois, comme on l'a vu, les élèves ont appliqué ce procédé indûment à des triangles qui n'étaient pas rectangles ou à des angles qui n'étaient pas aigus;
- les coordonnées cartésiennes d'un point d'un cercle trigonométriques, ces coordonnées étant, pour les élèves, le cosinus et le sinus du « point »;
- les fonctions sinus et cosinus d'une calculatrice, fonctions qui fournissent, selon les élèves, le sinus et le cosinus d'un nombre exprimant la mesure d'un angle Les élèves n'avaient pas accès à une calculatrice pendant les entrevues, mais ils y ont fait souvent référence comme au moyen privilégié de trouver la valeur d'un sinus ou d'un cosinus;
- les courbes à l'aspect onduleux caractéristique qui sont les graphiques des fonctions sinus et cosinus. Certains élèves admettaient que ces courbes continuaient à représenter les mêmes fonctions lorsqu'elles subissaient une rotation ou un changement d'échelle

Les élèves connaissaient également une cinquième représentation, celle sous forme d'équation, mais ils y avaient rarement recours et étaient susceptibles de se tromper lorsqu'ils le faisaient.

Au moment où nous les avons rencontrés, les élèves n'avaient pas encore bien établi les liens entre ces diverses représentations et c'est cette faiblesse, voire cette absence, de liens qui est en grande partie responsable de la pauvreté de leur compréhension globale, qui comprend, rappelons-le, l'intégration structurée des connaissances. Si l'on adoptait la perspective de Hiebert et Carpenter [1992, p. 67], pour qui une notion mathématique est comprise si elle fait partie d'un réseau de représentations mentales, le degré de compréhension étant déterminé par le nombre et la force des liens, il faudrait même conclure d'emblée à une pauvreté de leur compréhension tout court

Lorsqu'on compare la performance des élèves dans le contexte du triangle rectangle et dans celui du cercle trigonométrique, on constate qu'elle a été meilleure dans le premier contexte, même si le second aurait dû être plus frais dans leur esprit, puisqu'ils venaient tout juste d'en terminer l'étude alors que plus d'un an s'était écoulé depuis la présentation du premier Nous avons notamment observé peu de traces de compréhension, de quelque genre que ce soit, de la fonction d'enroulement et de son rôle dans la définition des fonctions trigonométriques Si l'on songe que la fonction d'enroulement n'est qu'un moyen didactique destiné à rendre plus visuelle, plus « concrète », la construction des fonctions trigonométriques, ce constat laisse perplexe. Il faut reconnaître que cette approche concrétise la définition des fonctions trigonométriques au prix de la compliquer considérablement. Peut-être l'inconvénient de cette complication l'emporte-t-il sur l'avantage d'une plus grande concrétisation ...

Les résultats qui nous ont le plus surpris concernent la compréhension initiale et, plus particulièrement, les connaissances préalables En effet, nous ne nous imaginions pas que des élèves au stade de ceux et celles que nous avons interrogés ne partageaient pas le sens communément attribué aux mots « hypoténuse », « rapport » et « trigonométrique » Pourtant, certains élèves, comme nous l'avons indiqué, concevaient l'hypoténuse comme le côté le plus long dans n'importe quel triangle et d'autres entendaient par « rapport » ce que l'on entend couramment par « proportion ». Quant à l'adjectif « trigonométrique », quelques élèves nous ont semblé lui attribuer peu de sens, comme s'il ne modifiait essentiellement pas les noms qu'il accompagnait, comme si n'importe quel « rapport », « fonction » ou « cercle » pouvait être un exemple d'un « rapport trigonométrique », d'une « fonction trigonométrique » ou d'un « cercle trigonométrique ». Cette observation nous a amenées à prendre conscience du fait que l'emploi de l'adjectif « trigonométrique » n'est pas banal. Premièrement, il s'agit d'un emploi très restreint: il est question de *point* et de *cercle* trigonométriques, mais pas de *droite* ou d'*angle* trigonométriques, de *rapport* trigonométrique, mais pas de *produit* trigonométrique, Deuxièmement, le sens de cet adjectif varie d'un cas à l'autre: un cercle trigonométrique est un cercle centré à l'origine et ayant un rayon de longueur un, mais une fonction trigonométrique n'est pas du tout une fonction « centrée à l'origine et ayant un rayon de longueur un » ! Enfin, l'existence de cercles trigonométriques n'a-t-elle pas pu contribuer à faire croire à Berthe que le cercle soit une fonction trigonométrique ?

Toujours à propos des connaissances préalables, nous avons observé chez les cinq élèves des représentations de la notion de fonction déjà répertoriées aussi bien dans l'histoire que dans la didactique des mathématiques [Kleiner, 1989 et 1993; Tall, 1992, p 497-501]: la fonction comme courbe ou graphique, et la fonction comme équation ou formule, comme quelque chose où « il y [a] une variable ». Nous avons recueilli aussi des propos plus inattendus: qu'un tableau représente autant de « fonctions » qu'il comporte de lignes et, à l'inverse, qu'une « fonction » soit l'ensemble de plusieurs des objets que nous appelons communément fonctions (« la fonction trigonométrique c'est l'ensemble, le cosinus, le sinus, toutes ces choses-là »)

Enfin, les élèves ont manifesté peu de familiarité avec les nombres réels, ce qui était escompté (les calculatrices comme les ordinateurs s'accomodent fort bien d'un sous-ensemble fini des nombres rationnels), mais aussi avec les nombres rationnels. « Rationnel, ça veut dire quoi ? » nous a demandé Claire et elle s'est dite incapable, tout comme

Paul et Anne, de transformer 3/5 et 4/5 en nombres à virgule sans l'aide d'une calculatrice

En somme, un manque insoupçonné de préalables s'ajoute à la faiblesse des liens entre diverses représentations pour expliquer certaines des difficultés éprouvées par les élèves avec les notions de sinus et de cosinus.

En général, la compréhension procédurale nous a semblé être le mode de compréhension privilégié par les élèves, dans le sens que pour eux et pour elles les mathématiques nous ont semblé être davantage quelque chose « à faire » qu'un sujet de réflexion et d'échange: par exemple, Luc expliquerait ce qu'est une fonction trigonométrique en commençant par dire que « habituellement *ça se travaille* dans un triangle rectangle » Interrogé sur la présence d'unités dans les rapports trigonométriques, il a reconnu n'avoir jamais pensé à la question, et qu'il « faisait » habituellement ça sur sa calculatrice. Les élèves nous ont parlé du sinus et du cosinus surtout comme de quelque chose à trouver (ou à utiliser pour trouver autre chose) et ont précisé que le moyen le plus commode de les trouver était la calculatrice À défaut de celle-ci, les élèves ont eu recours à une série de procédés, plus ou moins valides et plus ou moins pertinents: la division des longueurs de deux côtés d'un triangle, l'application des théorèmes des sinus et des cosinus, l'évaluation des coordonnées cartésiennes d'un point trigonométrique et d'autres encore.[10]

Cette prédominance de la composante procédurale de la compréhension est un stade naturel dans la construction d'un concept. Selon Herscovics et Bergeron [1982, p 585], « au tout début le concept visé s'estompe et se confond avec la procédure menant à sa construction [.] Ce n'est que graduellement que les contours d'un concept se précisent, que celui-ci se détache de la procédure, et qu'il commence à avoir une existence propre dans notre esprit. » Sfard [1991] a traité du même problème dans une perspective un peu différente Pour cette auteure il existe deux façons complémentaires de concevoir une notion mathématique, une conception opératoire et une conception structurale: du premier point de vue, on remarque des procédés, des algorithmes et des actions, tandis que du second on conçoit la même notion comme un objet Toujours selon Sfard, les deux types de conception sont essentiels à la compréhension d'une notion Dans le cas de la plupart des idées mathématique, la conception opératoire précède la conception structurelle et pour atteindre cette dernière, il faut développer la capacité de « réifier » un procédé, c'est-à-dire de le transformer en une « chose ». Il s'agit d'un changement de perspective qui demande beaucoup d'effort et qui peut se produire soudainement plutôt que graduellement [11]

Le passage d'une conception opératoire à une conception structurale n'était pas l'objet de notre étude et les données que nous avons recueillies jettent peu de lumière sur la façon dont ce passage se réalise. Il est vrai que parfois les élèves que nous avons interrogés ont parlé du sinus et du cosinus comme d'objets, surtout quand ils les ont représentés sous forme de graphiques de fonctions, mais la faiblesse des liens établis entre cette représentation et les autres nous fait douter qu'ils et elles disposaient de la double vision préconisée par Sfard. Même l'atteinte, que nous avons constatée, d'un certain degré d'abstraction, surtout dans le contexte du triangle rectangle, n'est pas une garantie de la « réification » des notions de sinus et de cosinus, puisqu'il est possible d'en saisir quelques propriétés et de les justifier tout en raisonnant sur ces notions en tant que procédés — et c'est ce que les élèves ont fait dans la plupart des cas

Enfin, les observations que nous avons rapportées concernant la formalisation indiquent que cette composante de la compréhension est tributaire non seulement d'une abstraction préalable de la notion étudiée, comme l'ont affirmé Herscovics et Bergeron [1982, p. 586], mais aussi d'une familiarité préalable avec certaines particularités du langage mathématique, notamment l'emploi de lettres pour représenter des variables.

Conclusion

Soulignons avant tout que si la compréhension dont ont fait preuve les cinq élèves qui ont participé à la présente étude s'est avérée inachevée, rien de ce que nous avons observé ne permet de leur en faire reproche, et encore moins à leur enseignante, dont la compétence ne fait aucun doute. La compréhension n'est pas un objectif facile à atteindre, c'est souvent un long processus qui demande temps et énergie. De plus, comme l'a souligné Sfard [1991 et 1994], le succès ne couronne pas automatiquement les efforts déployés Or, le temps disponible pour réaliser un programme scolaire est limité. À l'intérieur de celui-ci les mathématiques se trouvent en concurrence avec d'autres matières et la trigonométrie, avec d'autres branches des mathématiques. Aux objectifs de compréhension font compétition des objectifs de connaissance, d'application et de résolution de problèmes

Il serait tentant de plaider, à l'appui de nos résultats, pour qu'une place plus importante soit accordée au développement de la compréhension des notions de sinus et de cosinus (les élèves nous ont d'ailleurs confié que les tâches que nous leur avons soumises ne ressemblaient pas à celles qu'on leur présentait habituellement à l'école), mais nous sommes conscients que cela se ferait au détriment d'autres objectifs Sans vouloir entrer dans un débat sur la valeur relative des divers objectifs d'enseignement, nous nous limiterons ici à formuler quelques recommandations susceptibles d'améliorer la compréhension du sinus et du cosinus. Certaines ne requièrent pas beaucoup de temps et sont aussi pertinentes à la compréhension d'autres notions mathématiques.

Premièrement, nos résultats rappellent l'importance de vérifier que les élèves possèdent les préalables des notions que nous voulons enseigner, qu'ils et elles partagent le sens de mots que nous utilisons. La difficulté pour les enseignants et les enseignantes est d'imaginer que cela puisse ne pas être le cas pour des mots et des concepts courants que les élèves devraient avoir acquis depuis longtemps.

Deuxièmement, si l'on veut favoriser la compréhension, il faut accorder plus d'importance aux liens entre les diverses représentations d'une notion. Ces liens peuvent nous sembler évidents et banals lorsque nous possédons un concept, mais ne le sont pas pour ceux et celles qui ne les ont pas encore forgés. Il est crucial de les souligner explicitement. Nous rejoignons ici l'une des préoccupations principales exprimées par le National Council of Teachers of Mathematics [1989].

Troisièmement, la grande difficulté d'expression que nous avons remarquée chez tous et toutes les élèves qui ont participé à la présente étude nous incite à suggérer que l'on essaie de donner plus souvent aux élèves l'occasion de discuter de sujets mathématiques.

Enfin, plus ponctuellement, il nous semble que l'approche des fonctions trigonométriques basée sur la fonction d'enroulement soit à reconsidérer, afin de s'assurer qu'elle soit véritablement plus avantageuse que d'autres approches.

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre gratitude aux élèves qui ont rendu possible la présente recherche en acceptant d'y participer. Nous remercions également Lucie Deblois pour avoir lu et commenté une version préliminaire du présent texte.

Notes

1 Thérien et al. [1990, p. 6] illustrent cette catégorie d'erreurs par l exemple suivant: « L'élève applique la définition de sinus (côté opposé/hypoténuse) à un angle de 90° ».

2 Pour des exemples d'études qui, contrairement à la nôtre, portent sur la façon dont la compréhension évolue (soudainement ou graduellement, progressivement ou avec des reculs), voir Maier [1988], Pirie et Kieren [1989 et 1994] et Sierpinska [1990].

3 Herscovics et Bergeron [1988] ont par la suite développé un modèle de compréhension, appelé constructiviste élargi, qui comporte deux paliers, le premier palier touchant la compréhension des concepts physiques préliminaires et le second la compréhension du concept mathématique émergeant. Nous nous sommes plutôt appuyés sur le modèle non élargi de ces auteurs, car il nous a semblé mieux se prêter à la description de la compréhension de notions mathématiques relativement « avancées » comme celles qui nous intéressaient.

4 Nous avons choisi ces deux contextes parce que ce sont les deux contextes utilisés actuellement pour l'enseignement de la trigonométrie au Québec. Le contexte du triangle rectangle est présenté en quatrième secondaire et celui du cercle trigonométrique en cinquième. D'autres contextes, notamment celui de l'angle général, n'ont pas été retenus parce qu'on ne les retrouve pas dans les curriculums québécois.

5 Le modèle, les critères de compréhension et les tâches qui constituent le protocole d'entrevue, ainsi que le processus d'améliorations successives qui a amené à leur forme finale sont décrits en détail dans De Kee [1994].

6 Il s'agit de noms fictifs afin de préserver l'anonymat des personnes qui ont participé à la recherche.

7 Soient A, B et C les angles d'un triangle et a, b et c les côtés respectivement opposés à ces angles. Alors la « loi des sinus » dit que

$$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$$

et celle des cosinus que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

8 En la prenant pour acquise, nous n'avons pas songé à vérifier la connaissance que les élèves avaient de la notion d'angle. Or, le comportement de Paul rapporté plus haut, lorsqu'il mesurait les côtés d'un angle tels qu'ils apparaissaient dans le dessin qui lui était fourni, comme s'il s'agissait de segments plutôt que de demi-droites, soulève un doute quant à sa compréhension de cette notion.

9 Au cours d'une étude pilote, nous avions observé l'existence de cette conception de l'hypoténuse chez sept des quinze élèves interrogés.

10 Par exemple, Anne nous a dit que le sinus d un angle nul « ce serait zéro [parce que] quand tu utilises quelques chose qui a zéro, la plupart du temps ça donne zéro comme réponse ». Pour Luc, le sinus de $\pi/4$ serait une demie « parce que je sais que le sinus de $\pi/2$ c'est un, donc le sinus de $\pi/4$ c'est la moitié ». Anne et Paul aussi ont succombé, du moins une fois, à la tentation d'opérer sur les fonctions sinus ou cosinus comme si elles étaient linéaires.

11 Dans un article subséquent, Sfard [1994] expose l'hypothèse que la « réification » d'une notion mathématique se produit dans notre esprit avec la naissance d'une métaphore nous permettant de manipuler mentalement cette notion comme si elle était un objet physique. Dubinsky [1991, p. 107] réfère à une opération mentale semblable à la « réification » par l'expression « encapsuler » et Gray et Tall [1994] introduisent le néologisme « procept » pour désigner l'amalgame d'un procédé et d'un concept: par exemple, pour « comprendre » une fraction, il faut être capable de l'interpréter simultanément comme *un* nombre (un concept) et comme la division de deux nombres entiers (un procédé).

Références

De Kee, S. [1994] *La compréhension des rapports et des fonctions trigonométriques sinus et cosinus chez des élèves du secondaire. Thèse de doctorat.* Université Laval, Québec

Dubinsky, E. [1991]. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, p. 95-123. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Gray, E. M. et D. Tall [1994]. Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25: 2, 116-140

Grouws, D. A. (Ed.) [1992] *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company

Herscovics, N. et J. Bergeron [1982]. Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation*, 8: 3, 576-596

Herscovics, N. et J. Bergeron [1988]. An extended model of understanding. In C. Lacompagne et M. Behr (Eds.), *Proceedings of PME-NA 10*, DeKalb, Illinois: Northern Illinois University, p. 15-22

Hiebert J. et T. Carpenter [1992]. Learning and teaching with understanding. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* p. 65-97. New York: MacMillan Publishing Company

Kleiner, I. [1989]. Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20: 4, 282-300

Kleiner, I. [1993]. Functions: Historical and pedagogical aspects. *Science & Education*, 2, 183-209

Maier, H. [1988]. Du concept de compréhension dans l'enseignement des mathématiques. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, p. 29-39, Éditions La Pensée Sauvage

National Council of Teachers of Mathematics [1989]. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia

Pirie, S. et T. Kieren [1989]. A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9: 3, 7-11

Pirie, S. et T. Kieren [1994]. Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26: 2-3, 165-190

Sfard, A. [1991]. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22: 1, 1-36

Sfard, A. [1994]. Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14: 1, 44-55

Sierpinska, A. [1990]. Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10: 3, 24-36

Tall, D. [1992]. The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 495-511. New York: MacMillan Publishing Company

Thérien, L., J. Lapointe, B. Marcos et S. Pirmoradi [1990]. Des erreurs instructives. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec* 30: 3, 5-11