ÉPISTÉMOLOGIE ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUESTIONS ANCIENNES, NOUVELLES QUESTIONS

JÉRÔME PROULX, JEAN-FRANÇOIS MAHEUX [1]

Dans l'un de ses essais, Dewey écrivait que le « progrès intellectuel » ne procède généralement pas par la résolution des questions qui nous préoccupent, mais plutôt par leur abandon, leur dépassement … au profit de nouveaux intérêts, attitudes et questions :

> The conviction persists, though history shows it to be a hallucination, that all the questions that the human mind has asked are questions that can be answered in terms of the alternatives that the questions themselves present. But, in fact, intellectual progress usually occurs through sheer abandonment of questions together with both of the alternatives they assume—an abandonment that results from their decreasing vitality and a change of urgent interest. We do not solve them: we get over them. Old questions are solved by disappearing, evaporating, while new questions corresponding to the changed attitude of endeavor and preference take their place. (Dewey, 1910, pp. 18-19)

Une telle position a encore de quoi surprendre, surtout ceux pour qui la recherche (mise au service du « progrès intellectuel ») a pour objectif de *répondre* aux questions qu'elle se pose, et non pas d'en venir à les laisser tomber pour passer à autre chose ! En didactique des mathématiques [2], ne donnons-nous pas souvent l'impression qu'un bon travail de recherche repose sur un problème bien enraciné dans un ensemble de questions et de réponses travaillées par d'autres ? Problème que l'on a su explorer à l'aide d'une méthode appropriée, par des analyses bien faites, et dont résulte une conclusion qui apporte à tout le moins des éléments de réponse à la question initialement posée ? N'est-ce pas un peu dans cet esprit que David Wheeler invitait en 1981 certains chercheurs à formuler dans cette même revue les grandes lignes des problèmes de recherche clés pour notre communauté ? Donc, si faire de la recherche n'est pas trouver des réponses, alors à quoi bon en faire, ou quoi chercher ?

D'autre part, ce n'est pas d'hier que l'on met en doute l'image un peu romantique d'une science qui progresse à coups de découvertes. Kuhn (1962), par exemple, s'est fait particulièrement convaincant en avançant que le progrès de la science repose essentiellement sur des *changements de paradigmes.* Ces crises concrétisent un bouleversement dans la vision du monde qui rend caduques certaines questions au profit de questions nouvelles. L'exemple classique est sans doute celui de la nature de la lumière : dans l'ancien paradigme, la lumière devait être *soit* une onde, *soit* une particule, et il paraissait de la plus haute importance de répondre (une fois pour toute) à la question de sa nature véritable. Un changement de paradigme permit d'abandonner cette question, de passer par-dessus, puis d'explorer le champ d'investigation ouvert par l'idée d'une association onde-particule au moyen de l'improbable constante de Planck. En ce qui a trait à l'éducation mathématique, nous avons fait d'importantes observations en ce sens dans le cadre de nos recherches doctorales. Dans Proulx (2007), nous mettons en lumière une vision où faire de la recherche conduit non pas à généraliser sur les phénomènes investigués, mais à générer de nouvelles idées et façons de voir ceux-ci. Un peu dans la même veine, nous avons proposé dans Maheux (2010) de voir la recherche comme une activité interrompue (nous sommes bien des chercheurs, et non pas des « trouveurs ») qui porte sa propre contradiction, car sa « reproduction » repose sur l'arrivée de nouveaux chercheurs qui viennent, de par leurs questions, transformer la communauté.

En principe, ce n'est pas qu'il est vain et inutile de questionner, loin de là. Questionner reste ce qui permet d'avancer, même si ce n'est pas toujours en raison des réponses à ces questions ! Dans cet article, nous mettons de l'avant cette idée en nous intéressant à quelques questions de nature *épistémologique*, c'est-à-dire qui concernent les manières dont on conçoit l'apprentissage et les connaissances en didactique des mathématiques. De telles questions ont été très vives durant les années 1980, en particulier autour du travail d'un des « pères » du constructivisme, Ernst von Glasersfeld, qui nous a récemment quittés. Ses travaux ont nourri plusieurs didacticiens des mathématiques d'un questionnement épistémologique dont les retombées sont saisissantes. Et, pourtant, ce type de questionnement semble s'être peu à peu évanoui. Est-ce parce que nous avons trouvé réponse aux questions alors posées ? L'examen de quelques-unes d'entre-elles, que nous proposons ici, suggère que ce n'est pas le cas : nous sommes plutôt, comme dirait Dewey, « passés par-dessus ».

Nous vous proposons de suivre quelques-unes de ces filiations afin d'entrevoir l'apport d'un questionnement épistémologique et l'intérêt de rappeler ces questions. Ce retour permet de prendre conscience de leur apport en regard des questions qui nous occupent aujourd'hui, et de montrer que non seulement ces questions ne sont pas « fermées » ou « répondues », mais transformées. Ou plutôt : qu'elles ont

For the Learning of Mathematics **32**, 2 (July, 2012)
FLM Publishing Association, Fredericton, New Brunswick, Canada

transformé notre questionnement, offrant de nouvelles entrées en didactique des mathématiques et les épistémologies qui sous-tendent ces travaux. Dans les sections suivantes, nous présentons trois de ces questions, formulées autour de thèmes clés du constructivisme : la viabilité, l'erreur comme connaissance et la subjectivité des interprétations [3]. Ces thèmes sont abordés dans l'intention de susciter la réflexion : il ne s'agit pas de faire la critique ou l'éloge de travaux ou de positions en didactique ou autour de la pensée constructiviste, mais de proposer une petite « histoire des idées » au croisement des deux.

Question 1 : Et si les connaissances sont « viables » et non vraies ou fausses ?

Au fondement, les théories constructivistes posent un regard critique sur la notion de « réalité » en faisant une distinction essentielle entre « vérité » et « viabilité ». D'un point de vue constructiviste, les théories rationalistes et empiristes de la connaissance présentent la vérité comme la recherche d'une vision « juste » du monde, que ce soit du point de vue de la science ou de l'apprenant. On se base sur l'existence d'une réalité objective que l'on cherche à comprendre, à représenter fidèlement, afin d'en découvrir le secret. Cette image évoque l'idée d'une « correspondance terme à terme » entre le monde et le savoir, ou la connaissance. La notion de vérité est alors fondamentale, même si celle-ci est plus souvent posée pour les réalistes comme quelque chose à atteindre et non comme quelque chose d'acquis (Vacher, 1998). Ceci est reflété dans l'idée de l'apprenant se construisant une représentation interne du monde externe ou d'une connaissance comme miroir de la réalité se raffinant de plus en plus. La théorie des nombres fournit plusieurs exemples intéressants de ceci. Par exemple, on sait que ce qui a été considéré comme de « vrais » nombres a longtemps été limité aux entiers positifs et aux rationnels. Les nombres négatifs, les nombres imaginaires et les hyperréels sont ensuite venus, tour à tour, perfectionner notre compréhension de ce monde des nombres. De même, en termes d'apprentissage, on souhaite dans cette perspective que les élèves développent des « conceptions » justes des phénomènes ou des idées qu'ils rencontrent. Une conception fausse ou incomplète doit *céder la place* à une compréhension plus élaborée, par exemple celle du « nombre » et des phénomènes qui s'y rattachent, se rapprochant de plus en plus de la « vérité » à leur propos.

Contrastant avec cette perspective positiviste, les théories constructivistes mettent de côté l'idée de vérité en raison de l'exigence qu'elle pose vis-à-vis de l'existence d'une réalité objective et, qui plus est, connaissable. Pour parler de connaissance, on adopte plutôt le concept de viabilité, voire de compatibilité :

> Simply put, the notion of viability means that an action, operation, conceptual structure, or even a theory, is considered "viable" as long as it is useful in accomplishing a task or in achieving a goal that one has set for oneself. (von Glasersfeld, 1998, p. 24)

Le savoir ici n'est plus vu comme une représentation plus ou moins juste du monde, mais comme « une clé qui ouvre le monde » dira von Glasersfeld (1984). Posséder une clé compatible avec telle ou telle serrure est bien différent de pouvoir dire comment cette serrure fonctionne (« vraiment ») ou de prétendre que cette clé est *la* clé correspondant à cette serrure (crocheteurs et serruriers en savent quelque chose). Tant du point de vue scientifique que du point de vue de l'apprentissage, une action ou une explication (une théorie, *etc.*) est viable dans la mesure où elle nous permet de fonctionner d'une manière que l'on trouve satisfaisante. L'acceptation des négatifs, irrationnels ou complexes à titre de « nombres » n'est pas regardé comme la découverte d'une vérité mathématique fondamentale préexistante, mais plutôt—et on évite ainsi la question—comme la prise en main de nouvelles clés permettant d'ouvrir de nouvelles serrures (auxquelles, désormais, on s'intéresse) ou d'offrir des réponses plus satisfaisantes aux phénomènes observés (par exemple l'identification des racines d'un polynôme). Il en est de même pour un élève qui rencontre les entiers relatifs, et doit les accepter comme nombres et opérer sur eux suivant certaines règles. Le phénomène s'apparente moins à l'ajout de nouvelles connaissances représentant la réalité, ou à un changement de conception, qu'à l'appropriation de nouvelles manières de faire intimement liées à l'expérience d'un intérêt particulier à faire les choses ainsi. Dans ce paradigme, les conceptions mathématiques des élèves se réorganisent, se complexifient, de manière à intégrer de nouvelles expériences : « their usefulness in some contexts must be respected » écrivent Smith, diSessa et Roschelle (1994, p. 73). Ainsi, l'élève qui ordonne la suite de nombres « 1, 3, -5, 8 » ne donne pas une réponse « fausse », mais au contraire une réponse « viable », de son propre point de vue. Ce que nous voyons comme difficulté, au lieu d'en parler comme une « mauvaise connaissance » des entiers relatifs, on s'y intéresse plutôt dans la non-pertinence, pour l'élève, de tenir compte du signe du nombre.

Comme on le voit à travers ces exemples un peu grossiers, la question posée par les épistémologies constructivistes sur la nature de la connaissance (viable *versus* vraie) est riche pour la recherche en didactique des mathématiques. Comme le résume Noddings (1990), s'il existe différentes interprétations du constructivisme en didactique des mathématiques, la majorité des chercheurs s'entendent sur l'idée (a) que toute connaissance mathématique est construite (b) au sein et par le moyen de structures cognitives qui (c) sont en développement continuel par effet d'adaptation. Le constructivisme propose de mettre de côté les débats sur l'universalité, la préexistence et l'objectivisme pour s'intéresser plutôt aux processus d'apprentissage (ou de développement scientifique) et à l'aspect pratique et quotidien de la connaissance (dont mathématiques) (p. ex., Steffe & Kieren, 1994). Mais qu'en est-il de cette proposition elle-même ? Quand plusieurs ont critiqué ce modèle pour différentes raisons (p. ex., Lerman, 1996, ou Noddings, 1990, elle-même), avons-nous, comme communauté, répondu à la question posée par une vision de la connaissance en termes de viabilité ou sommes nous plutôt, aujourd'hui, passés par-dessus ?

D'une certaine manière, nous pensons que *oui*. Il nous semble que l'assertion de von Glasersfeld, inspirée de Sierpinska, qui observe que « notre propre culture mathématique peut ne pas être beaucoup plus universelle que celle de nos élèves » (1989, p. 368) nous entraine déjà ailleurs. La question posée par la construction de connaissances viables nous laisse quelque peu insatisfaits par rapport aux aspects culturels ou historiques de l'activité mathématique. En effet, nous en sommes à présent à nous intéresser de plus en plus aux *dynamiques* entre les mathématiques des uns et les mathématiques des autres, plutôt que de penser celles-ci en isolation. C'est aussi le cas, avons-nous proposé ailleurs (Proulx, 2012) des mathématiques spécifiques à la didactique par rapport à celles des mathématiciens : nous avons en didactique des mathématiques un monde mathématique qui nous est propre, bien spécifique à nos intentions, compréhensions et intérêts. Ce qui nous importe alors est de reconnaître que les mathématiques n'existent pas, du moins pas telles que nous les rencontrons, en dehors des personnes qui « font » des mathématiques. Les bouleversements évoqués plus haut concernant ce qui est considéré vrai ou viable n'ont-ils pas leur origine dans ce « faire » et ses relations avec d'autres domaines d'activités (plus ou moins proches des mathématiques)? Est-ce que ceci doit nous conduire à un nouveau changement de paradigme, peut-être déjà amorcé, dans lequel on évite de parler d'enseignement, d'apprentissage ou de compréhensions spécifiques pour s'intéresser surtout aux différentes formes d'activités mathématiques et à la démultiplication des possibles dans la rencontre de l'une et de l'autre?

Question 2 : Et si l'erreur est connaissance ?

La notion de viabilité amène une autre idée importante du point de vue des théories constructivistes : l'erreur n'est plus erreur, mais connaissance [4]. Évidemment, mettre l'erreur au service de l'apprentissage n'est pas nouveau et a même mérité un colloque complet (en 1987 lors de la CIEAEM à Sherbrooke, Québec). Cependant, il y a plusieurs manières de s'intéresser à l'erreur, et bien des façons de la concevoir. Dans une approche rationaliste, l'erreur est une limite, la marque d'une faiblesse et quelque chose que l'on cherche à réduire, voire à éliminer. On pense aussi à l'erreur comme pathologie, sous un paradigme médical (voir Bélanger, 1990-1991). L'erreur est ce sur quoi on veut agir. Évidemment, il n'est pas difficile de trouver des traces de cette manière de penser en didactique des mathématiques. Un certain nombre de travaux ont cherché à (développer des moyens de) « diagnostiquer » les élèves et à intervenir sur l'erreur (quand ? comment ?), ainsi qu'à développer des méthodes ayant pour objectif que les élèves ne commettent plus d'erreur. L'exemple typique est celui des algorithmes pour opérer sur les nombres « à la main ». Vouloir éviter l'erreur amène à découper la tâche en sous-tâches sur lesquelles des règles simples (mais nombreuses !) sont énoncées. En cas d'erreur, l'élève est ramené à ces règles. En revanche, comme nombre de travaux en didactique des mathématiques l'ont montré, vouloir s'appuyer sur l'erreur consiste surtout à donner un sens global à la procédure, puis à s'engager avec les élèves sur les cas où ils buttent. Partant du principe que les élèves savent tout de même quelque chose à propos de ces situations mais que certains les interprètent différemment, on fait jouer ces éléments de manière à expliciter les raisonnements pour amener une utilisation standard de l'algorithme.

Une distinction importante demeure cependant entre ceci et ce que propose le constructivisme comme théorie de la connaissance. En deux mots, l'idée n'est pas de poser l'erreur comme connaissance « en formation », mais bien comme connaissance *en soi.* Maturana (Maturana et Poerksen, 2004) est formel sur ce point, expliquant qu'il est impossible pour quelqu'un, au moment même de son expérience, de faire la distinction entre perception et illusion. Cette impossibilité signifie que ce n'est que « vue de l'extérieur » que quelque chose peut paraître comme une interprétation plus ou moins appropriée. En ce sens, il n'y a pas de distinction possible entre erreur et connaissance au moment même où nous « savons », et c'est seulement à la lumière d'autres expériences que telle action (incluant les « actions de pensée ») prend le statut de connaissance ou d'erreur.

De ce point de vue, « une erreur » n'est plus à juger en termes de convenance (en la disant peu ou pas appropriée), mais se présente comme le signe d'une possibilité nouvelle de développement de connaissance (Simon, 1995). Le cas de la lecture de problèmes et leur modélisation algébrique est un bon exemple. Une des « erreurs » connues en algèbre est liée à l'énoncé de Clement, Lockhead et Monk (1981) « il y a six fois plus d'élèves que de professeurs », fréquemment traduit par l'équation « 6•E=P ». L'élève qui écrit « 6•E=P » ne fait pas une erreur au niveau de la lecture. Il sait en effet bien lire le « six », le « fois », le « plus », le « d'élèves », *etc.,* et on peut croire que cet élève comprend la signification de l'énoncé. Par contre, quelque chose se produit au moment de le traduire mathématiquement. Le problème est qu'en mathématiques on traduit d'une manière particulière : on écrit cet énoncé sous forme d'une égalité (non présente comme telle dans le texte) suivant des règles particulières pour donner « 6•P=E ». Mais c'est évidemment « 6•E » qui est le plus proche du texte. Ce n'est donc pas une erreur de lecture, mais une lecture dans un autre domaine de référence, ici le français (dont l'élève respecte l'ordre grammatical). Cette erreur est perçue après l'expérience par un observateur externe, l'enseignant (et ensuite l'élève lui-même qui pourra trouver curieux, après substitution, la présence de tant de professeurs !). La lecture en mathématiques demande des façons particulières de lire en tant que domaine de référence (Gouvernement du Québec, 1988). De plus, même dans le domaine des mathématiques, écrire « 6•E » a beaucoup de sens, par exemple si on quantifie combien de fois plus il y a d'élèves sans le mettre en relation avec le nombre de professeurs : « 6•E » est une excellente modélisation de « il y a *six fois plus d'élèves* dans ma classe ». Comme on le voit, cette « erreur » *est* connaissance dans le domaine où l'élève travaille, l'enjeu véritable étant de *passer d'un domaine à un autre.*

Cette vision a accompagné, sur le plan d'une réflexion épistémologique, tout le travail sur le statut de l'erreur. On pense en particulier à l'attention donnée désormais aux phénomènes d'appropriations d'une tâche mathématique (sa « transformation » par rapport à nos interprétations *a priori*), une orientation aux origines et qui fût la « marque de commerce » d'une entrée constructiviste dans notre domaine (Steffe & Kieren, 1994). En même temps, cette vision n'a évidemment pas été reprise dans toutes ses nuances et ses implications possibles. Parmi les questions les plus difficiles qui viennent avec une entrée constructiviste sur l'erreur, il y a par exemple : Si les erreurs sont des connaissances, pourquoi et de quel droit vouloir changer ces connaissances (pour d'autres) ? Qu'est-ce qui différencie les connaissances qui sont des erreurs de celles qui n'en sont pas ? Certaines sont-elles plus importantes que d'autres ? On peut avancer des réponses : au cours des années, nous avons répondu à la proposition constructiviste, mais certains aspects sont restés dans l'ombre. Qui plus est, il est encore commun de parler de conceptions erronées, de difficultés, d'erreurs, d'obstacles. Ce vocabulaire fonctionne-t-il vraiment dans une vision de l'erreur comme connaissance ? Si oui, en quoi, et si non, au profit de quoi d'autre ? Devons-nous parler de changements de domaines ? Et comment en juger ? [5]

Là encore, nous sommes peu à peu en train de passer au-delà de la question de l'erreur comme connaissance quand nous nous intéressons, comme mentionné plus haut, au fait de « faire » des mathématiques plutôt que d'en « connaître ». Quand il s'agit de mettre les élèves en activité mathématique, et au contact de manières de faire historiquement et culturellement développées, on s'intéresse plutôt aux processus et aux idées en ce qu'ils *deviennent* mathématiques. Il importe peu que les élèves se trompent ou aient raison, tant qu'ils s'engagent dans une démarche que l'on reconnaît mathématique et dans laquelle ce qui vient des élèves et de l'enseignant sont des points d'entrée d'où l'on veut faire avancer, enrichir, *etc.* En d'autres mots, le travail sur l'erreur nous conduit à concevoir l'éducation mathématique selon des points de vue où parler en termes d'erreurs et de connaissances n'est plus utile. C'est le cas lorsque, par exemple, on s'intéresse aux pratiques mathématiques et aux savoir-faire, où on réfléchit sur les différentes manières de *reconnaitre* ou *traiter* des situations que les élèves mettent en oeuvre.

Question 3 : Et si toutes connaissances sur la connaissance sont aussi des interprétations subjective ?

Pour l'instant, notre attention s'est portée principalement sur les élèves et d'un point de vue relativement externe : celui de la recherche. Or, les théories constructivistes comme théories de la connaissance cherchent à rendre compte non seulement de ce qui se passe au niveau des élèves, mais également du côté de l'enseignant (et, en fait, dans toute activité humaine). Si les connaissances des élèves sont viables, y compris leurs « erreurs », c'est aussi le cas des connaissances des enseignants par rapport aux élèves, y compris leurs croyances à l'égard des leurs erreurs et connaissances. Pour bien saisir la portée de ceci, il faut concevoir que le constructivisme ne se présente pas, ce qui serait une contradiction évidente, comme une théorie disposant de « certitudes » par rapport à la connaissance, mais elle-même comme une manière viable de penser celle-ci (Pépin, 1994). Ainsi, la viabilité placée au cœur de la théorie constructiviste s'applique également au constructivisme comme théorie de la connaissance et nous contraint en quelque sorte à mettre entre parenthèses nos connaissances sur la connaissance, surtout s'il s'agit d'intervenir sur les connaissances d'autrui. Mais, à dire que toutes connaissances sont des interprétations subjectives, même nos connaissances sur la connaissance, on peut se demander si nous ne sommes pas pris au piège dans des « boucles interprétatives », enfermés dans un subjectivisme stérile. N'est-il pas important de savoir comment les élèves apprennent pour ultimement savoir ce qui marche et ce qui ne marche pas en enseignement des mathématiques ?

On sait bien qu'un enseignant peut affirmer « cet élève s'est trompé » et un autre peut répondre « en effet », sans qu'ils aient tous deux la même interprétation de la production de l'élève, ou de ce que « se tromper » signifie. Par exemple, si l'élève fait « $4 \times -2 = 8$ », l'un peut croire que l'élève n'a pas compris le rôle du signe, alors que l'autre peut croire à un oubli dans l'écriture de la réponse ou la lecture de la question. Relancer ces enseignants sur leurs interprétations peut les conduire à reconfigurer celles-ci, mais leur « affirmer » explicitement que ce qui est donné à voir n'est pas une erreur mais bien l'expression d'une connaissance de la part de l'élève ne garantit en rien de telles réorganisations. Un tel changement reste sujet à la viabilité de cette perspective pour ces enseignants et dans les conditions particulières qui sont alors les leurs. D'un point de vue constructiviste, on prend alors fermement le parti de croire que « ce qui marche ou ne marche pas » ne peut être établi de manière universelle, ni une fois pour toutes. Se proposant ainsi « ouvert » aux interprétations subjectives, une des forces du constructivisme est qu'il nous conduit à penser de manière critique et imaginative à propos de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, ne nous mettant plus en quête de solution mais plutôt de critères nous donnant le moyen de choisir nos approches et interventions (Noddings, 1990).

La formation des enseignants se présente ainsi rarement en termes de « ce qui marche et ne marche pas en enseignement des mathématiques » ou comme le déploiement d'une science des « variables » qu'il s'agit de maîtriser. L'accent est plutôt mis sur les *savoir-faire* des futurs enseignants eux-mêmes, sur les postures qu'ils adoptent, sur la pratique que chacun développe, et ainsi de suite (voir les collectifs Blouin et Gattuso, 2000 ; Proulx et Gattuso, 2010). Lorsque développées à partir de préoccupations pour la formation des enseignants, comme ce fut le cas au département de mathématiques à l'UQAM (Bednarz, 2001), les recherches en didactique n'ont pas pour but de comprendre et d'expliquer des phénomènes, puis de communiquer ces compréhensions aux futurs enseignants (Bednarz, 2010). Par contre, plusieurs d'entre elles examinent des manières de voir et de faire qui sollicitent une prise en compte de la viabilité de celles-ci en contexte donné. Les « savoir-enseigner » sont des savoirs « toujours à refaire ». La viabilité nous éloigne de la recherche de pratiques universelles d'enseignement, et nous amène à voir le développement de façons d'enseigner viables dans le contexte même de l'enseignant. On cherche alors plutôt à comprendre comment se développent les manières de comprendre et d'agir de chacun (Proulx, 2003). Sans trop généraliser ni exagérer la part du constructivisme dans ceci, ces parallèles nous semblent néanmoins évocateurs d'une certaine prise en compte du caractère interprétatif (construit et compatible) de la connaissance.

Les réflexions décrites concernant la formation sont encore présentes aujourd'hui. On peut se demander, en revenant à l'affirmation de Dewey, si nous sommes « passés par-dessus » la question de la subjectivité des interprétations ou si nous sommes encore « dedans ». Si on a en partie « répondu », un certain inconfort demeure : c'est une chose d'énoncer des principes généraux pour la formation des maîtres, et une autre de développer des cadres précis pour articuler ces principes. Est-ce toujours *viable* de miser sur le développement des compétences interprétatives des enseignants ? De concevoir leur action en fonction de leur propre pratique ? De chercher à les mettre en situation de confronter leur subjectivité à celle d'autres où à l'expérience du contexte de la classe, par exemple ? Sur quoi peut-on se baser pour dire qu'il y a « complexification » ou « progrès » dans les manières de faire ? Et, concrètement, comment agissons-nous comme formateur face à un enseignant qui refuserait tout dialogue, toute confrontation, tout espace d'intersubjectivité en relation avec sa pratique ?

Ces questions sont bien vivantes. Et, il est difficile de voir que nous arriverons, comme communauté, à y répondre de manière unanime. Mais ce plancher glissant de la subjectivité des interprétations, déjà, ouvre à autre chose. Tant comme chercheurs que comme formateurs, nous pouvons nous intéresser aux possibles de la formation des maîtres sans néanmoins chercher à en dégager des principes généraux, mais plutôt du point de vue de notre propre action (Maheux, 2012). S'intéresser à *l'activité* mathématique témoigne par ailleurs d'un positionnement épistémologique différent de celui du constructivisme, tel que nous l'avons explicité dans Maheux et Roth (2011). Des exemples tirés de nos travaux sur la formation des enseignants soulignent l'idée du formateur « complice » dont le rôle est de « provoquer » et qui se trouve également sujet à la « provocation » de l'autre (Proulx, 2010a) ou celle « d'improvisation » dans le contexte de l'enseignement et de la formation des maitres (Maheux et Lajoie, 2011).

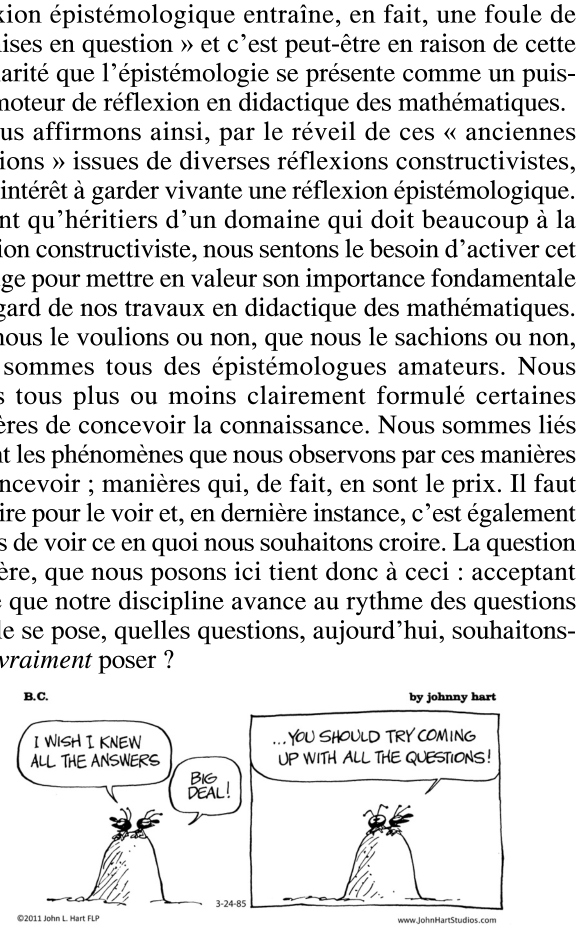
Questions/réponses : En guise de conclusion

Dans cet article, nous soulignons trois questions à saveur épistémologique issues de la pensée constructiviste, présentées en regard de ce qu'elles peuvent soulever en relation avec l'apprentissage et la formation à l'enseignement en mathématiques. Dans chacun des cas, nous expliquons comment ces questions se rattachent à des mouvements importants en didactique des mathématiques, suggérant ainsi leur pouvoir de stimulation pour le domaine de recherche. Ces questions ont été choisies parmi une pléiade d'autres questions possibles (liées p. ex. aux représentations, à la nature des mathématiques, aux conflits cognitifs, aux facteurs historico-culturels), et l'exercice montre que loin d'être épuisées ces questions ont tout avantage à être ressassées. On pourrait aussi examiner par quoi ces dépassements sont provoqués, faire une étude plus poussée en suivant des évolutions précises, examiner comment différents paradigmes concurrents ont également pu contribuer à l'avancement de certaines questions, et même réfléchir à l'apport des questions didactiques en épistémologie.

Notre propos était toutefois plus modeste, cherchant simplement à susciter des réflexions autour du fait que sans être vraiment résolues, les questions épistémologiques ont le potentiel de nous conduire à en aborder d'autres, surtout si l'on reprend le travail à partir du contexte de l'enseignement des mathématiques. Ceci rejoint bien l'inspiration de Dewey proposant que le « progrès intellectuel » dépend non pas des réponses à nos questions, mais du fait de « passer par-dessus ». Ainsi, pour chacune des questions, nous croyons que comme communauté nous sommes déjà un peu « ailleurs ». Nous pourrions développer ces réorientations de manières plus précises, mais ce qu'il importe de retenir est que ces développements s'articulent en prenant appui sur le travail épistémologique qu'ont apporté les théories constructivistes au monde de l'éducation mathématique (voir Lerman, 1996 ; Radford, 2011 ; Roth, 2011). C'est donc dire que si nous avons « abandonné » ces questions, ce dépassement doit lui-même beaucoup au constructivisme et à la réflexion épistémologique qu'il propose (Proulx, 2010b).

S'il faut néanmoins conclure, ne serait-ce que partiellement, qu'on nous permette encore une fois de ressasser une vieille idée. Cette idée est la suivante : poser une question, c'est déjà à moitié y répondre (Varela, 2004). En puisant au constructivisme comme théorie de la connaissance, nous avons problématisé celle-ci en certains termes, dressant dès lors un cadre à ce qui peut être conçu comme réponses (partielles) à ces questions. Mieux encore, nous avons problématisé la connaissance comme quelque chose de questionnable ou plutôt de « non-questionnable » au sens où l'existence même de « connaissances » n'est pas mise en doute, malgré toutes les prudences que les théories constructivistes se donnent à l'égard d'une quelconque réalité ontologique. C'est donc dire que de s'engager dans une réflexion épistémologique entraîne, en fait, une foule de « remises en question » et c'est peut-être en raison de cette circularité que l'épistémologie se présente comme un puissant moteur de réflexion en didactique des mathématiques.

Nous affirmons ainsi, par le réveil de ces « anciennes questions » issues de diverses réflexions constructivistes, notre intérêt à garder vivante une réflexion épistémologique. En tant qu'héritiers d'un domaine qui doit beaucoup à la tradition constructiviste, nous sentons le besoin d'activer cet héritage pour mettre en valeur son importance fondamentale en regard de nos travaux en didactique des mathématiques. Que nous le voulions ou non, que nous le sachions ou non, nous sommes tous des épistémologues amateurs. Nous avons tous plus ou moins clairement formulé certaines manières de concevoir la connaissance. Nous sommes liés devant les phénomènes que nous observons par ces manières de concevoir ; manières qui, de fait, en sont le prix. Il faut le croire pour le voir et, en dernière instance, c'est également à nous de voir ce en quoi nous souhaitons croire. La question dernière, que nous posons ici tient donc à ceci : acceptant l'idée que notre discipline avance au rythme des questions qu'elle se pose, quelles questions, aujourd'hui, souhaitons-nous *vraiment* poser ?



By permission of John L. Hart FLP and Creators Syndicate, Inc.

Notes

[1] Certaines de ces idées ont été préalablement développées lors d'une présentation donnée en 2011 au colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec* à l'Université du Québec à Trois-Rivières, Québec.

[2] Nous disons « en » didactique des mathématiques, plutôt que de parler de « la » didactique de manière à ne pas suggérer qu'il n'en existe qu'une ou que la recherché est bien unifiée. Nous utilisons le terme de manière générique pour désigner un champ de recherche, comme on le fait avec l'expression anglaise « mathematics education research ».

[3] Il existe évidemment une variété de constructivismes dans la littérature (Radical, Social, Pragmatique, Psychologique, Pédagogique, Constructionnisme, *etc.*) (voir, p. ex., Noddings, 1990; Philipps, 2000; Steffe & Gale, 1995). Les trois questions posées dans cet article sont plus influencées par les propos de von Glasersfeld, mais toutes sont au cœur des préoccupations de ces constructivismes.

[4] La distinction entre viabilité et erreur est subtile, mais importante. Dans un cas, l'attention se porte sur le contraste traditionnellement imposé entre la présence et l'absence de connaissance : la viabilité recadre cette distinction en suggérant que « nous connaissons toujours quelque chose », ce « quelque chose » étant notre propre expérience du monde. Concernant l'erreur, c'est plutôt la question de la convenance qui est revisitée : telle action ou telle idée est-elle (ou non) appropriée ? Et si « non », qu'en faire ?

[5] L'entrée offerte sur l'erreur ici est particulière et d'autres entrées sont possibles, par exemple en termes d'obstacles épistémologiques, de conceptions alternatives, de conceptualisations des élèves en difficultés d'apprentissage, *etc.* Le manque d'espace nous empêche toutefois de traiter ces divers points.

Références

Bednarz, N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies* **1**(1), 61- 80.

Bednarz, N. (2010) La formation à l'enseignement des mathématiques au secondaire : quelques enjeux. Dans Proulx, J. & Gattuso, L. (Eds.) *Formation des Enseignants en Mathématiques : Tendances et Perspectives Actuelles,* pp. 185-192. Sherbrooke, QC: Éditions du CRP.

Bélanger M. (1990–1991) Les erreurs en arithmétique: un siècle de présomption américaine. *Petit x* **26**, 49–71.

Blouin, P. & Gattuso, L. (Eds.) (2000) *Didactique des Mathématiques et Formation des Enseignants.* Montréal, QC: Modulo éditeur.

Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G.S. (1981) Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly* **88**(4), 286-290.

Dewey, J. (1910) *The Influence of Darwin on Philosophy and Other Essays.* New York, NY: Henry Holt and Company.

Glasersfeld, E. von (1984) An introduction to radical constructivism. In Watzlawick, P. (Ed.) *The Invented Reality: How Do We Know What We Believe We Know? (Contributions to Constructivism),* pp. 17-40. New York, NY: Norton.

Glasersfeld, E. von (1989) Commentaires subjectifs par un observateur. Dans Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.) *Construction des Savoirs: Obstacles et Conflits,* pp. 367-371. Montréal, QC: Agence d'Arc.

Glasersfeld, E. von. (1998) Why constructivism must be radical. In Larochelle, M., Bednarz, N. & Garrison, J. (Eds.) *Constructivism and Education*, pp. 23-28. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Gouvernement du Québec. (1988) *Fascicule K. Guide pédagogique, primaire, mathématiques. Résolution de problèmes. Orientation générale.* Québec, QC : Ministère de l'Éducation.

Kuhn, T.S. (1962) *The Structure of Scientific Revolutions.* Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lerman, S. (1996) Intersubjectivity in mathematics learning: a challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal of Research in Mathematics Education* **27**(2), 133-150.

Maheux, J.-F. (2010) *How do we know? An Epistemological Journey in the Day-to-day, Moment to-Moment, of Researching, Teaching and Learning in Mathematics Education.* Thèse de doctorat, Université de Victoria, Canada.

Maheux, J.-F. (2012) Former à l'enseignement des mathématiques au primaire: petit éloge de l'artiste. Dans Proulx, J., Corriveau, C. & Squalli, H. (Eds.) *Formation Mathématique pour l'Enseignement des Mathématiques : Pratiques, Orientations et Recherches,* pp. 321-332. Québec, QC : Presses de l'Université du Québec.

Maheux, J.-F. & Lajoie, C. (2011) On improvisation in teaching and teacher education. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education* **8**(2), 86-92.

Maheux, J.-F. & Roth, W.-M. (2011) Relationality and mathematical knowing. *For the Learning of Mathematics* **31**(3), 36-41.

Maturana, H.R. & Poerksen, B. (2004) *From Being to Doing: The Origins of the Biology of Cognition.* Allemagne, DE : Carl-Auer Verlag.

Noddings, N. (1990) Constructivism in mathematics education. Dans Davis, R.B. Maher, C.A. & Noddings, N. (Eds.) *Constructivist Views on Teaching and Hearing Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education,* Monograph 4, pp. 7-21.

Pépin, Y. (1994) Savoirs pratiques et savoirs scolaires: une représentation constructiviste de l'éducation. *Revue des Sciences de l'Éducation* **20**(1), 63–85.

Philipps, D.C. (Ed.) (2000) *Constructivism in Education : Opinions and Second Opinions on Controversial Issues*. Chicago, IL: National Society for the Study of Education.

Proulx, J. (2003) *Pratiques des Futurs Enseignants de Mathématiques au Secondaire sous l'Angle des Explications Orales: Intentions Sous-Jacentes et Influences.* Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Proulx, J. (2007) *(Enlarging) Secondary-Level Mathematics Teachers' Mathematical Knowledge: An Investigation of Professional Development.* Thèse de doctorat, Université de l'Alberta, Canada.

Proulx, J. (2010a) Is "facilitator" the right word? And on what grounds? Some reflections and theorizations. *Complicity: An International Journal of Complexity and Education* **7**(2), 52-65.

Proulx, J. (2010b) Is constructivism a victim of its success in mathematics education? *For the Learning of Mathematics* **30**(3), 24–25.

Proulx, J. (2012) De l'existance de mathématiques de la didactique: reflexions sur l'articulation entre mathématique et didactique. Dans Dorier, J.-L. & Coutat, S. (Eds.) *Actes de Colloque Espace Mathématique Francophone 2012.* (CD-ROM). Genève, Suisse: Université de Genève.

Proulx, J. & Gattuso, L. (Eds.) (2010) *Formation des Enseignants en Mathématiques: Tendances et Perspectives Actuelles.* Sherbrooke, QC: Éditions du CRP.

Radford, L. (2011) Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments* **1**, 1 – 27.

Roth, W.-M. (2011) *Geometry as Objective Science in Elementary Classrooms: Mathematics in the Flesh.* New York, NY: Routledge.

Simon, M.A. (1995) Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education* **26**(2), 114-162.

Smith, J.P., III, diSessa, A.A. & Roschelle, J. (1994) Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences* **3**(2), 115-163.

Steffe, L. & Gale, J. (Eds.) (1995) *Constructivism in Education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L.P. & Kieren, T.E. (1994) Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* **25**(6), 711-733.

Vacher, L.-M. (1998) *La passion du Réel: La Philosophie Devant les Sciences.* Montreal, QC: Éditions Liber.

Varela, F.J. (2004) Truth is what works. In Poerksen, B. (Ed.) *The Certainty of Uncertainty: Dialogues Introducing Constructivism,* pp. 85-107. Exeter, UK: Imprint Academic.

Wheeler, D. (1981) A research program for mathematics education (I). *For the Learning of Mathematics* **2**(1), 27-29.