Résolution élémentaire de problèmes

CHARLES CASSIDY, BERNARD HODGSON

La résolution de problèmes est, depuis plusieurs années, l'un des thèmes centraux de l'apprentissage des mathématiques. Les travaux de Pólya et de ses "disciples" ont permis de mettre en relief une série de principes sous-jacents à l'art de la découverte mathématique et pouvant faire l'objet d'un enseignement approprié (voir par exemple Schoenfeld [15]). Nous aimerions ici attirer l'attention sur un aspect de ce thème qui nous paraît avoir une certaine importance et qui ne semble pas avoir été fréquemment présenté dans la littérature: la résolution de problèmes à l'aide de méthodes *élémentaires*, faisant appel à un niveau relativement peu élevé de connaissances préalables ou même de maturité mathématique. (Évidemment, tel qu'utilisé ici, le mot "élémentaire" n'est pas sans une certaine ambiguïté et sa portée exacte pourra varier selon le contexte; toutefois, nous ne chercherons pas à préciser davantage pour le moment, réservant certains commentaires pour plus loin dans l'article.) Nous désignerons un tel point de vue par l'expression *résolution élémentaire de problèmes*. Bien qu'il ne s'agisse pas là d'un aspect strictement nouveau en soi, il nous apparaît néanmoins important de chercher à le mettre en évidence de façon explicite afin de faire valoir le rôle qu'il peut jouer, en particulier en rapport avec l'enseignement des mathématiques.

Le problème des triangles à côtés entiers

Notre réflexion autour de l'idée de résolution élémentaire de problèmes a été provoquée d'une façon assurément familière à bien des mathématiciens. Un jour, en feuilletant plus ou moins distraitement un numéro de l'American Mathematical Monthly, nous y avons remarqué un article au titre plutôt attirant: "Triangles with integer sides" [10]. Tout naturellement, nous y avons jeté un rapide coup d'oeil afin de voir de quoi il retournait; le problème que s'étaient posé les auteurs est de déterminer *le nombre de triangles non congruents à côtés entiers et de périmètre donné N.*

À prime abord, il s'agit là d'une question on ne peut plus claire et élémentaire. Rien ne dit cependant qu'il doive en être autant de sa solution: les exemples abondent de problèmes s'énonçant de façon simple mais recélant des complications insoupçonnées. Néanmoins, un problème ainsi formulé en des termes élémentaires est susceptible de susciter la curiosité et l'intérêt d'un grand nombre de personnes. Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous nous imaginions très bien présenter une telle question à des étudiants du niveau secondaire.

En examinant de plus près l'article du Monthly, nous y avons trouvé que les auteurs répondaient complètement à la question posée de la façon suivante: si $T(N)$ représente le nombre de triangles non congruents à côtés entiers de périmètre N, alors

1°) si $N \geq 4$ est pair et si R est défini par $N = 12K + R$ avec $4 \leq R \leq 14$, alors

$$T(N) = \frac{N^2 - R^2}{48} + T(R);$$

2°) $T(4) = 0$; $T(6) = T(8) = 1$; $T(10) = 2$; $T(12) = 3$; $T(14) = 4$;

3°) si $N \geq 6$ est pair, alors $T(N) = T(N - 3)$.

Bien qu'une telle recette pour déterminer $T(N)$ ne soit pas en soi si compliquée, il nous semblait douteux que les étudiants du secondaire à qui nous aurions aimé poser le problème auraient pu la découvrir; ou même, pour la plupart, qu'ils auraient su l'utiliser correctement pour trouver $T(N)$ dans un cas concret. De plus, et c'est là que l'impasse devenait totale, les arguments utilisés par les auteurs reposent sur une démarche combinatoire qui ne nous semblait certainement pas appropriée au niveau secondaire.

Que pouvions-nous faire devant une telle situation? Soit tout simplement ignorer le problème des triangles à côtés entiers et passer outre, soit encore nous efforcer d'y apporter une solution plus adéquate en regard de la clientèle visée. Nous étions évidemment conscients qu'en choisissant le second volet de l'alternative, nous courions le risque de connaître un échec et que la solution pourrait résister à toute tentative de simplification. Cependant, il nous est apparu après quelques temps qu'en abordant le problème de façon géométrique, il était possible d'en dégager une intuition qui permette de "voir" les triangles à dénombrer, obtenant ainsi une méthode de solution qui nous semble plus facilement accessible. C'est une telle solution que nous aimerions maintenant brièvement présenter (bien sûr, la solution donnée pourrait possiblement être elle-même simplifiée).

Notre solution au problème des triangles à côtés entiers

Rappelons quel est le problème: il s'agit d'identifier tous les ensembles possibles formés de trois entiers positifs a, b et c tels que $a + b + c = N$ et qui peuvent représenter les côtés d'un triangle. (Afin d'éviter de compter le même ensemble plusieurs fois, nous pouvons supposer, pour fixer les idées, que $a \geq b \geq c$.)

Que les longueurs a, b et c puissent représenter les côtés d'un triangle signifie bien sûr qu'elles doivent satisfaire l'inégalité triangulaire, le cas pertinent en l'occurrence étant $a < b + c$ (ou de façon équivalente $a + 1 \leq b + c$, puisque les trois longueurs sont entières). L'équation $a + b + c = N$ permet alors d'éliminer c dans les inégalités précédentes, ce qui nous donne les trois conditions sui-

For the Learning of Mathematics **2**, 3 (March 1982)
FLM Publishing Association, Montreal, Quebec, Canada

vantes correspondant à la région ombragée dans la figure 1:

$$(1)\ a \geq b$$

$$(2)\ a + 2b \geq N$$

$$(3)\ a \leq (N - 1)/2$$

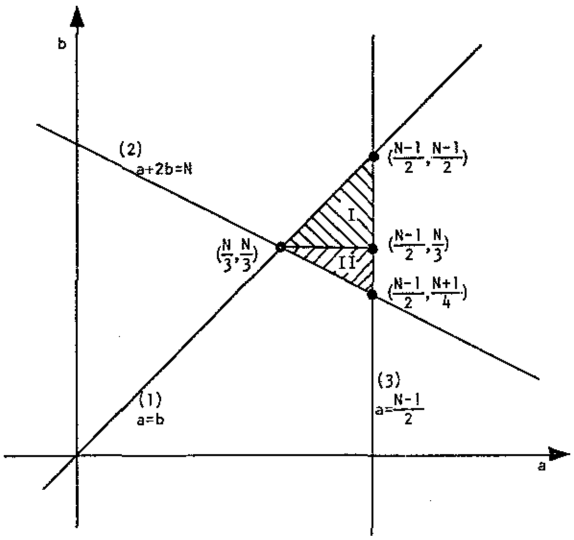

Figure 1

Le problème revient ainsi à déterminer le nombre de *points à coordonnées entières* (appelés simplement *points* ci-après) situés à l'intérieur ou sur la frontière de la région ombragée. *En un sens, le problème est déjà résolu;* pour chaque N donné, il est en effet facile de trouver $T(N)$ en construisant la figure 1 pour le N en question et en comptant les points correspondants; et une telle technique semble assurément être du niveau d'un étudiant du secondaire. Examinons maintenant comment, en plus, cette même figure 1 nous permet de trouver assez aisément une formule générale pour $T(N)$.

Il s'agit donc de compter les points de la région ombragée et la façon la plus simple de réaliser ce comptage consiste sans doute à voir cette région comme réunion des deux triangles I et II; nous convenons, pour fixer les idées, que la frontière commune à ces deux triangles sera considérée comme faisant partie du triangle II.

Il est facile de compter les points du triangle I; en effet, puisque la pente de la droite (1) est égale à 1, le nombre cherché est le $k^{\text{ième}}$ nombre triangulaire, où k est le nombre d'entiers $\leq (N - 1)/2$ et $> N/3$, c'est-à-dire $k = [(N - 1)/2] - [N/3]$, où $[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$. Il y a donc $k(k + 1)/2$ points dans le triangle I.

Afin de compter les points du triangle II, il est commode de considérer le segment le plus élevé dans ce triangle situé à une ordonnée entière. Puisque ce segment correspond à $b = [N/3]$, le nombre j de points qu'il contient est alors $j = k + 1 - r$, où r est le reste de la division de N par 3. (Ce fait se vérifie aisément en considérant successivement les trois cas $r = 0$, 1 et 2; il suffit de garder à l'esprit que la pente de la droite (2) est $-1/2$. Or le nombre de points dans II sur chacun des segments situés en-dessous de $b = [N/3]$ décroît de deux en deux lorqu'on passe d'un niveau au niveau inférieur suivant; cela découle à nouveau immédiatement du fait que la pente de (2) est $-1/2$. Le nombre total de points dans le triangle II est donc la somme de tous les entiers impairs ou pairs jusqu'à j, selon que j lui-même est impair ou pair. Dans le premier cas, on a donc $1 + 3 + 5 + \ldots + j = ((j + 1)/2)^2$ points, et dans l'autre, $2 + 4 + 6 + \ldots + j = (j/2)(j/2 + 1)$ points. Il est intéressant de remarquer que dans les deux cas, les sommes sont égales à $[m]\{m\}$ où $m = (j + 1)/2$ et $\{x\}$ désigne le plus petit entier $\geq x$. Ceci nous permet d'exprimer $T(N)$ sous la forme compacte

$$T(N) = \frac{k(k + 1)}{2} + [m]\{m\},$$

où k et m sont comme ci-haut.

Examen de quelques théorèmes classiques

Ayant réussi à simplifier la solution du problème des triangles à côtés entiers, certaines questions se présentaient naturellement à notre esprit. Dans quelle mesure un résultat mathématique peut-il se prêter à des démonstrations diverses? Quel rôle chacune de ces démonstrations joue-t-elle? Quel éclairage nous apporte-t-elle sur la portée du résultat? Et de façon encore plus fondamentale: quel intérêt y a-t-il à chercher une nouvelle démonstration d'un résultat déjà connu ou encore une nouvelle solution d'un problème déjà résolu? Un bref examen de quelques théorèmes classiques nous semblait à propos.

L'un des exemples les plus célèbres de simplification d'une démonstration est sans doute lié à la cinquième proposition du Livre I des *Éléments* d'Euclide (les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruents). Pour franchir le *pons asinorum* à la manière d'Euclide, il faut (voir [9, p. 251-252]) parcourir quarante-sept lignes de démonstration et se débrouiller avec pas moins de huit triangles (figure 2). La démonstration donnée par Pappus sept cents ans après Euclide évite toute construction auxiliaire (voir [9, p. 254]); elle repose sur l'idée de considérer le triangle donné de deux façons, à savoir le triangle BAC et le triangle CAB (figure 3), la conclusion découlant immédiatement de la congruence de ces deux triangles.

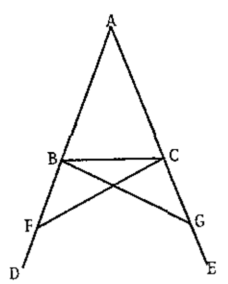

Figure 2

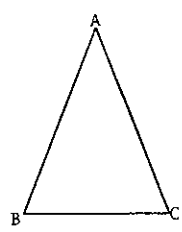

Figure 3

Quel que soit le sens que l'on veuille donner à cette expression, la démonstration de Pappus peut sans doute être considérée comme étant "meilleure": elle est concise, limpide et surtout met l'accent sur la propriété fondamentale au coeur même du problème: la symétrie du triangle isocèle par rapport à la médiatrice de la base (voir aussi la discussion de Heath [9, p. 254]). Il est intéressant de noter que l'approche de Pappus était récemment redécouverte par un programme automatisé de démonstration géométrique (voir à ce sujet Greer [6])

L'exemple précédent nous a fait voir un théorème dont la démonstration a pu être simplifiée; il arrive parfois cependant que la démarche se fasse dans le sens inverse, la démonstration originale étant remplacée par d'autres peut-être moins simples mais permettant éventuellement des débouchés nouveaux. C'est le cas ainsi de la question de l'infinitude des nombres premiers (voir [8]). Euclide en a donné une démonstration célèbre qui est restée un modèle d'élégance et d'ingéniosité, l'astuce résidant dans le fait de chercher à construire *un certain* premier plus grand qu'une suite donnée de premiers plutôt que le premier *suivant*. L'approche prise par Euler au 18e siècle est toute autre: il utilise la divergence de la série harmonique pour établir que les nombres premiers ne peuvent être en nombre fini. (En fait, Euler est allé plus loin que cela, en montrant aussi que la somme $\Sigma 1/p$ des réciproques de tous les nombres premiers est elle-même divergente, bien que de manière fort lente (voir [17]).) Une troisième démonstration de l'infinitude des nombres premiers a été donnée par Pólya; elle repose sur le fait que deux nombres de Fermat distincts,

$$2^{2^n} + 1 \text{ où } n \geq 1,$$

sont relativement premiers.

Ces trois démonstrations ont chacune un impact bien différent. Celle d'Euclide est sans doute la plus élémentaire; en procédant comme il le fait, Euclide se ramène à la quintessence même du problème, n'essayant pas d'obtenir plus qu'il n'est nécessaire. La démonstration de Pólya peut vraisemblablement être considérée comme une curiosité intéressante établissant un lien avec les mystérieux nombres de Fermat. Quant à la démonstration d'Euler, elle est évidemment beaucoup plus compliquée que les deux autres, mais combien plus puissante: l'histoire nous montre qu'elle fut extrêmement riche de conséquences. Si, pour certains, une telle démonstration "has the fascination of a difficult ascent of a mountain peak which could be reached from the other side by a comfortable road" ([3, p. 481]), nul doute par ailleurs que son importance véritable est due au lien créé entre l'Arithmétique, étude des quantités discrètes, et l'Analyse, étude des quantités continues (voir par exemple les commentaires de W. et F. Ellison dans [5, p. 270]). Un tel mélange, on le sait, s'est avéré des plus féconds, les méthodes amorçées par Euler ayant ouvert la voie aux travaux sur la fonction zêta $\zeta(s) = \Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^s$; l'importance de cette fonction pour l'étude de la distribution des nombres premiers fut reconnue cent ans plus tard par Riemann.

C'est grâce à ces travaux que fut rendue possible la démonstration d'un des résultats les plus remarquables en mathématiques: le théorème des nombres premiers. Cependant, suite à la démonstration donnée par Hadamard et de la Vallée Poussin à la fin du siècle dernier, il était considéré souhaitable d'en trouver une nouvelle démonstration évitant tout recours aux propriétés de la fonction zêta et à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le concept de nombre premier n'est-il pas, après tout, fondamentalement "plus simple" que celui de nombre complexe? La méthode présentée par Selberg en 1949 satisfait un tel critère. Toutefois, en raison de la complexité des liens réunissant les nombreuses étapes nécessaires à la démonstration, il ne s'ensuit certes pas pour autant que celle-ci puisse être qualifiée de "simple". Selon Richards [14, p. 53], il s'agit là d'une illustration d'une règle de base dans le folklore mathématique, le "principe de conservation de la difficulté", selon laquelle un résultat vraiment difficile demeurera difficile quelle que soit l'approche utilisée

Un contexte particulier où un mathématicien peut être appelé à chercher une nouvelle démonstration d'un théorème est celui où il voudra obtenir une démonstration constructive d'un résultat pour lequel il en possède déjà une non-constructive. Sans accepter pour autant la philosophie de l'école constructiviste, tout mathématicien reconnaîtra sans doute que souvent, "démontrer constructivement, c'est démontrer davantage". En guise d'illustration, citons la discussion présentée par Knuth [11, p. 273] à propos du théorème chinois du reste. Comparant deux méthodes de démonstration de ce résultat, l'une constructive et l'autre pas, Knuth fait valoir que cette dernière, quoique sans doute "plus belle" esthétiquement parlant, est cependant complètement inintéressante d'un point de vue calculatoire.

La liste de théorèmes importants admettant des démonstrations diverses pourrait être prolongée presqu'indéfiniment. Pour ne citer que quelques exemples additionnels: l'unicité de la factorisation d'un naturel en premiers ([3], [8]); l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ([8]); le théorème de Pythagore ([12]); le théorème fondamental de l'algèbre (pour une nouvelle démonstration récente, voir [2]); le théorème de Schwarz sur le triangle de périmètre minimal inscrit dans un triangle acutangle donné ([3], [13]); le théorème d'Anning-Erdös (voir le récit fort intéressant rapporté par Halmos [7]). Nul doute que le lecteur peut également proposer ses exemples préférés tirés d'à peu près n'importe quel domaine des mathématiques

Quelques commentaires autour de la résolution élémentaire de problèmes

L'examen de quelques théorèmes classiques nous avait donc convaincus que la présence de plusieurs démonstrations pour un même résultat est chose fréquente en mathématiques. Mais quel sens faut-il donner à ce phénomène? Ce n'est évidemment pas là une question facile et nous ne saurions certes prétendre en avoir fait le tour. Toutefois, nous aimerions partager avec le lecteur certaines réflexions à ce sujet. (Les commentaires que nous faisons ici s'appliquent tant à la résolution de problèmes qu'à la démonstration de théorèmes. Les théorèmes classiques sont en quelque sorte, ne l'oublions pas, des problèmes d'une autre époque qui ont eu du succès.)

Confronté à un problème à résoudre, un mathématicien l'attaquera bien sûr avec n'importe quel outil à sa disposition. Ce n'est généralement que dans un deuxième temps qu'il pourra se demander s'il est possible d'arriver à une solution d'une façon différente, par exemple en utilisant moins d'outils, ou encore des outils plus élémentaires, ou parfois même des outils plus sophistiqués (pensons à la démonstration d'Euler de l'infinitude des nombres premiers). Mais alors, peut-on se demander, à quoi bon chercher de nouvelles approches? Le problème n'a-t-il pas été résolu, après tout?

Plusieurs motifs pourraient vraisemblablement être suggérés en réponse ici. Ainsi, la concision, l'élégance ou l'ingéniosité sont des qualités qui pourront faire que telle approche soit appréciée des connaisseurs et la rendent plus attrayante que d'autres déjà connues. Parfois également, l'intérêt résidera dans la puissance de la méthode utilisée; telle approche, bien que plus complexe, pourra révéler des ouvertures nouvelles, étrangères aux approches qui existaient auparavant, et s'avérera ainsi à long terme nettement fructueuse pour l'avancement des mathématiques. De façon plus générale, enfin, il y a la question du rôle joué par la démonstration même d'un théorème ou encore par la résolution d'un problème en tant que telle. Celles-ci ne font pas que nous convaincre de la validité d'un certain résultat; elles peuvent également nous aider à situer ce résultat dans le tout mathématique. Un résultat établi de plusieurs façons pourra ainsi être vu selon divers aspects différents. Pour la plupart, ces aspects présenteront généralement un intérêt certain, apportant un éclairage particulier sur ce résultat, révélant certaines facettes cachées, faisant apparaître des liens nouveaux avec d'autres résultats connus. Ce rôle joué par des approches diverses rejoint d'ailleurs la pensée de Wittgenstein, qui affirme [4, p. 136]:

> *A mathematical proof connects a proposition with a system. But some connexions have greater permanence or greater force than others. You might even start by showing one connexion and then show another which seems more important than the first and makes you give it up.*

Qui plus est, et c'est là un aspect qu'il nous tenait à coeur de mettre en évidence ici, la recherche de nouvelles approches à un résultat donné peut revêtir une signification toute particulière dans un contexte pédagogique. L'enseignant qui désire enrichir l'univers mathématique dans lequel évoluent ses étudiants sera à l'affût de "beaux" problèmes susceptibles de les stimuler. Évidemment, ces problèmes devront leur être accessibles, tant en ce qui concerne la conclusion elle-même, c'est-à-dire la façon d'exprimer le résultat, que la démarche suivie pour l'obtenir. C'est ici que l'idée de résolution "élémentaire" de problèmes surgira. Une mise en garde s'impose toutefois: il ne saurait être question de prétendre que tout problème puisse être "simplifié" à volonté! (Pensons au "principe de conservation de la difficulté".) L'enseignant aura besoin de beaucoup de flair, et peut-être d'un peu de chance aussi, pour repérer les problèmes avec lesquels il pourra obtenir un certain succès.

Évidemment, les mots "simple" et "élémentaire", tels qu'utilisés dans une discussion comme celle-ci, sont en soi fort imprécis. À partir de quel moment un résultat cesse-t-il d'être "élémentaire"? Cela dépend-il du nombre de lignes dans la démonstration? De la subtilité des arguments utilisés? De la complexité des concepts en jeu? C'est fonction d'un peu tout cela, bien sûr, et d'autres choses encore. Dans un contexte pédagogique, toutefois, ces mots deviennent vraisemblablement un peu plus limpides, l'enseignant ayant comme repère le groupe-cible auquel le résultat est destiné. Ainsi, si on revient au problème des triangles à côtés entiers, une formule encore "plus simple" que celle que nous avons présentée plus haut a été obtenue par Andrews [1], à savoir

$$T(N) = \langle N^2/12 \rangle - [N/4]\,[(N+2)/4]$$

où $\langle x \rangle$ désigne l'entier le plus près de x. Toutefois, la démonstration d'Andrews repose sur certains résultats de la théorie des partitions. Bien qu'elle soit probablement "meilleure" du point de vue du mathématicien, en particulier en raison de sa concision et de son élégance, et qu'elle conviendrait sûrement à des étudiants universitaires en mathématiques, une telle approche est évidemment inadéquate lorsqu'on destine le problème à des étudiants du secondaire, les outils étant d'un niveau nettement trop avancé.

Enfin, un dernier commentaire: nous soutenons que la recherche d'une nouvelle démonstration d'un théorème donné ou encore la résolution d'un problème connu par des méthodes différentes constitue une oeuvre de création véritable, une contribution mathématique authentique. Bien sûr, il ne s'agit peut-être pas là d'un avancement de la science mathématique au sens où on l'entend en recherche de pointe, mais un tel apport améliore néanmoins l'état de connaissance d'un sujet et peut aider à sa compréhension générale. Ce point de vue se retrouve d'ailleurs dans Wittgenstein [16, p. 191]:

> *What is meant by: "A proof is a mathematical entity which cannot be replaced by any other"? It surely means that every single proof has a usefulness which no other one has. It might be said: "— that every proof, even of a proposition which has already been proved, is a contribution to mathematics". But why is it a contribution if its only point was to prove the proposition? Well, one can say: "the new proof shews (or* makes*) a new connexion"*

L'idée de résolution élémentaire de problèmes en est une toute simple, assez naturelle même, mais qui soulève plusieurs questions difficiles, tant sur la nature même des démonstrations mathématiques que sur le sens exact de certaines expressions telles "démonstration simple" ou "solution élémentaire". S'il nous a semblé important de mettre cette idée en évidence, c'est peut-être en partie parce que si un problème est susceptible d'être résolu par des méthodes élémentaires, alors il est souhaitable qu'une telle solution soit éventuellement trouvée, afin que le résultat soit accessible au plus grand nombre de personnes possible. Mais c'est davantage parce que la "philosophie" de résolution élémentaire nous paraît pouvoir jouer un rôle particulier dans un contexte pédagogique. Pour l'enseignant des niveaux pré-universitaires, la résolution élémentaire de problèmes peut constituer une contribution personnelle tout à fait privilégiée à l'édifice mathématique. En plus de lui permettre de créer un environnement riche pour ses étudiants, une telle démarche représente une activité de re-