L'APPRENTISSAGE DU SIGNE = : UN OBSTACLE COGNITIF IMPORTANT

LAURENT THEIS

De nombreux enfants de première année du primaire considèrent le signe = comme une incitation à effectuer une opération arithmétique. Ils voient ce signe comme un opérateur et non pas comme indicateur d'une relation d'égalité. Cette conception engendre principalement deux types de difficultés: ces enfants n'acceptent pas des égalités non conventionnelles et ils éprouvent des difficultés importantes à compléter des équations qui ne correspondent pas à une structure a + b = __.

Dans cet article, nous présentons les résultats d'une recherche dont l'objectif principal était de décrire le processus de compréhension du signe = auprès d'élèves de première année du primaire. Nous avons enseigné ce symbole dans le cadre d'une expérimentation didactique d'une durée de six semaines. À l'aide d'une étude de cas, nous décrivons à quel point la conception du signe = comme un opérateur est fortement ancrée chez des enfants de première année du primaire. Nous montrons qu'il est néanmoins possible de faire cheminer des enfants du début du primaire vers une conception du signe = comme indicateur d'une relation. Cependant, ce passage ne va pas de soi : il constitue un important obstacle cognitif. [1]

Mauvais curriculum ou limites cognitives?

Pourquoi l'initiation à la notation algébrique, qui se fait traditionnellement au début du secondaire, est si difficile pour un nombre important d'élèves? Plusieurs auteurs avancent que, lorsque beaucoup d'adolescents éprouvent des difficultés avec l'entrée dans l'algèbre, ce n'est pas parce que, conceptuellement, les notions et les structures abordées sont hors de leur portée. Ce serait plutôt l'enseignement reçu au primaire qui les empêcherait de réussir en algèbre. Ainsi, dans un article récent paru dans cette revue, Brizuela et Schliemann argumentent que les difficultés des élèves sont le résultat d'un curriculum qui ne leur permet tout simplement pas de développer un raisonnement algébrique:

> Perhaps it is not that students are not prepared or ready for learning algebra, but that the teaching or curriculum to which the students have been exposed has been preventing them from developing mathematical ideas and representations they would otherwise be capable of developing. (Brizuela et Schliemann, 2004, p. 33)

Cette recherche suggère que des enfants de quatrième année du primaire sont en mesure de résoudre des équations linéaires comportant une ou plusieurs inconnues des deux côtés du signe =, si des activités d'enseignement appropriées sont mises en place. Dickinson et Eade (2004) en arrivent à des conclusions similaires après avoir fait travailler des enfants de cinquième année du primaire sur des équations linéaires à l'aide de droites numériques. Les recherches de Carpenter, Franke et Levi (2003) montrent par ailleurs qu'il est possible de faire travailler des enfants de première et de deuxième année du primaire sur des tâches algébriques comme la généralisation de certaines propriétés des opérations de base.

D'ailleurs, depuis plusieurs années, on peut remarquer une tendance à développer le raisonnement algébrique dès le début du primaire. C'est le cas du Curriculum de l'Ontario (Ministère de l'Éducation et de la Formation, 1997) et du National Council of Teachers of Mathematics (2000), par exemple. Bien sûr, l'idée sous-jacente n'est pas de confronter les enfants à des symboles algébriques formels dès leur plus jeune âge, mais plutôt de leur proposer une réflexion différente et plus approfondie sur l'arithmétique (Carpenter, Franke et Levi, 2003). Dans ce contexte, Brizuela et Schliemann (2004) plaident en faveur d'une réduction des frontières entre l'arithmétique et l'algèbre. Pour y arriver, Kaput et Blanton (2000) suggèrent *d'algébriser* les matériels didactiques et de développer des pratiques d'enseignement favorables au développement de la pensée algébrique.

Une des difficultés les plus importantes que des enfants qui n'ont pas été confrontés à des activités algébriques au primaire vivent lorsqu'ils commencent à travailler l'algèbre est la reconnaissance du signe = comme un indicateur d'une relation d'équivalence, et non d'un opérateur (Bodin et Capponi, 1996; Smith, 2002). Cette conception est déjà fortement enracinée, même chez des enfants du début du primaire (Carpenter, Franke et Levi, 2003; Vance, 1998; Falkner, Levi et Carpenter, 1999), et elle empêche les enfants qui l'entretiennent de travailler sur des égalités qui ont une structure autre que a + b = c. Sáenz-Ludlow et Walgamuth (1998) ont observé que des enfants de troisième année qui considèrent le signe = comme un opérateur transforment des équations comme 2 + 4 = __ + 2 en 2 + 4 = 6 + 2. Shoecraft (1989) pour sa part mentionne que les participants à sa recherche séparent les égalités du type a + b = c + d en deux égalités différentes. Ainsi, un de ses élèves a transformé 2 + 7 = 4 + 5 en 2 + 7 = 9 et 4 + 5 = 9, pour obtenir de nouveau le schéma *question-réponse*.

Considérant l'importance de cet obstacle, ne serait-il pas alors opportun de mettre en place des mesures qui permettent aux enfants de développer une compréhension du signe = comme un indicateur de relation dès le début du primaire? Est-ce qu'une telle mesure permettrait d'éviter que les enfants construisent des conceptions limitées à propos de ce symbole et qu'ils éprouvent des difficultés plus tard, lorsqu'ils seront confrontés à une notation algébrique?

Dans cet article, nous souhaitons montrer qu'une conception du signe = comme un opérateur est fortement ancrée, puisqu'on peut déjà la retrouver chez des enfants de première année du primaire. Mais nous allons également montrer (à travers un exemple) qu'il y a des activités qui peuvent aider les élèves à franchir le seuil d'une telle conception. Enfin, nous allons montrer qu'il n'est pas facile pour des enfants aussi jeunes de comprendre *entièrement* la signification du signe =. Nous discuterons aussi de la pertinence de l'introduction de ce symbole dès la première année du primaire.

Le signe = perçu comme opérateur

Dans le cadre de notre recherche, nous avons effectué des entrevues auprès de onze enfants d'une première année d'un milieu urbain socioéconomiquement faible de la ville de Luxembourg (Grand-Duché de Luxembourg). Ensuite, nous avons conduit une expérimentation didactique avec six d'entre eux pour leur enseigner une conception du signe = comme indicateur d'une relation. Dans le cadre de cet article, nous allons analyser de manière plus précise le cas de Mathieu, classé comme un élève fort par son enseignante. Le cheminement de cet enfant est particulièrement intéressant, parce qu'en dépit de ses bonnes performances scolaires, la construction d'une signification du signe = comme un indicateur de relation a été aussi difficile pour lui que pour des élèves plus faibles. Par ailleurs, les stratégies qu'il utilise et les erreurs qu'il fait sont représentatives de celles observées auprès des autres enfants avec lesquels nous avons travaillé.

Afin de connaître les conceptions initiales de Mathieu sur le signe =, nous lui avons d'abord demandé d'évaluer plusieurs égalités, dont 4 + 5 = 9 et 7 = 3 + 4. Lorsque confronté à la première de ces expressions, très familière à Mathieu puisqu'elle correspond au type de *calculs* qu'il effectue à l'école, la conception qu'il a de ce symbole semble adéquate.

Ens. : Peux-tu me dire si ce qui est écrit ici (4 + 5 = 9) est correct?
Mathieu : Oui, c'est correct, parce que 4 + 5, c'est 9 (Mathieu compte sur ses mains, montre 4 sur une main et 5 sur l'autre main, puis compte tous les doigts montrés)
Ens. : Et ce signe (montre le signe =), qu'est-ce qu'il signifie?
Mathieu : C'est la même chose. (…) C'est la même chose ici (5 + 4) et ici (9).

Dès que nous lui proposons une égalité qui ne correspond plus à une expression à *calculs* (7 = 3 + 4), la réponse de Mathieu change :

Ens. : Est-ce que tu peux lire à haute voix ce qui est écrit ici?
Mathieu : C'est à l'envers (Mathieu essaie de tourner la feuille sur laquelle l'égalité est écrite.)
Ens. : Est-ce que ce qui est écrit est juste?
Mathieu : Non, c'est à l'envers. Ça devrait être 4 + 3 = 7, et ici, c'est 7 = 3 + 4. C'est à l'envers. Ce n'est pas bien fait.
Ens. : Et si on avait mis 4 + 3 = 7, est-ce que ce serait juste?
Mathieu : Oui, mais, comme ça (7 = 3 + 4), c'est faux.

Cet extrait montre clairement que Mathieu ne considère pas le signe = comme un indicateur d'une relation. Même s'il ne le dit pas explicitement, il croit que c'est la *réponse* (la somme de 4 et de 3) qui doit venir après le signe d'égalité. En ayant recours à une lecture de droite à gauche de l'égalité, Mathieu arrive ainsi à ramener l'égalité à une forme dans laquelle la réponse suit immédiatement le signe d'égalité. Cette conception de Mathieu se confirme lorsque nous lui demandons de compléter l'expression 6 + 2 = __ + 3.

Ens. : Quel nombre dois-tu mettre dans le trou, pour que ce soit juste?
Mathieu : Si ça va jusqu'ici (immédiatement après l'espace vacant, que Mathieu doit remplir), je connais le calcul. (Mathieu biffe ensuite *+3* et écrit 8).
Ens. : Et si on avait dit *six plus deux* égale *quelque chose plus huit*, est-ce que ça aurait été juste?
Mathieu : Non, ce serait faux.

Ici encore, Mathieu ramène l'égalité à une structure dans laquelle le résultat de l'addition qui se situe à gauche du signe = suit immédiatement ce symbole. Il considère donc encore une fois le signe = comme une incitation à écrire une réponse.

Mathieu n'est pas le seul à éprouver ces difficultés. Elles ont été constatées par d'autres auteurs (entre autres Vance, 1998; Sáenz-Ludlow et Walgamuth, 1998; Falkner, Levi et Carpenter, 1999; Kieran, 1992) et ce, pas seulement en première année d'études. Ainsi, les élèves questionnés par Sáenz-Ludlow et Walgamuth (1998) étaient en troisième année du primaire. Falkner, Levi et Carpenter (1999) ont même constaté que cette conception semble généralisée chez tous les enfants du primaire. Lorsqu'ils ont présenté l'égalité 8 + 4 = __ + 5 à 752 enfants fréquentant différentes classes du primaire, le taux de réussite demeure plus petit que 10% tant en première qu'en sixième année du primaire.

Quelles sont alors les origines de cette conception et comment se fait-il qu'elle soit déjà si fortement ancrée chez des enfants qui viennent à peine de commencer leur parcours scolaire? Une première hypothèse concerne l'enseignement que les enfants ont reçu. Dans les manuels luxembourgeois qui ont été utilisés dans la classe des enfants avec lesquels nous avons travaillé, la signification du signe = est traitée uniquement dans le contexte de comparaisons de collections, et conjointement avec les signes : *plus petit que*, <, et *plus grand que*, >. De même, la très grande majorité des équations que les enfants doivent résoudre correspondent à une structure a + b = _. La conception qu'on doit écrire une réponse après le signe = peut donc être facilement maintenue dans ce type d'activités. Finalement, dans le guide de l'enseignant, aucune mention n'est faite de la manière dont il faudrait travailler la signification du signe = avec les enfants. D'ailleurs, l'enseignante de la classe nous a confié qu'elle n'est pas intervenue spécifiquement sur la signification de ce symbole.

Si l'enseignement reçu par les enfants influence la construction d'une conception du signe = comme un opérateur, d'autres éléments, davantage reliés à la nature des apprentissages mathématiques de jeunes enfants, peuvent également jouer un rôle important. Ainsi, lors des premiers contacts spontanés avec l'addition, l'enfant considère d'abord les parts à additionner, pour ensuite trouver la somme qui en constitue en quelque sorte une réponse.

Des activités visant à modifier la conception initiale des élèves

Afin de déterminer si des enfants de la première année du primaire sont en mesure de développer une compréhension du signe = comme un indicateur d'une relation d'égalité, nous avons réalisé une expérimentation didactique. Celle-ci nous a permis de suivre l'évolution des élèves tout au long des 7 séquences d'une demi-heure au cours desquelles nous avons travaillé avec eux de manière individuelle. Différentes tâches demandaient aux élèves d'évaluer des égalités ou de compléter des équations. Au cours de notre séquence d'enseignement, nous présentions deux types de structures additives aux enfants. Les premières étaient de structure a + b = c ou a = b + c et les deuxièmes étaient de structure a + b = c + d. Au début, les énoncés étaient toujours accompagnés d'une représentation concrète réalisée avec des jetons en plastique de même taille et de même forme. Nous distinguions deux types de tâches.

> *Premier type de tâche*. Les élèves étaient amenés à *évaluer* des égalités, sans inconnue. Nous demandions aux enfants de *déterminer* si un énoncé est correct et, le cas échéant, de transformer une *fausse égalité* en égalité. Par exemple, lorsque nous invitions l'enfant à se prononcer sur l'égalité 3 + 4 = 7 + 1, celui-ci devait évaluer si cette égalité est correcte, justifier sa réponse et modifier un ou plusieurs des nombres impliqués pour obtenir une *vraie* égalité.
>
> *Deuxième type de tâche*. On demande ici aux enfants de *compléter* des égalités comprenant une inconnue. La représentation concrète de l'inconnue peut alors revêtir deux formes différentes : tout d'abord celle d'un sac en plastique transparent, dans lequel l'enfant doit ajouter un certain nombre de jetons, et aussi celle d'une boîte en carton non transparente qui contient des jetons, dont l'enfant doit déterminer le nombre. Cette dernière représentation est similaire à celle utilisée par Radford et Grenier (1996) qui ont également représenté l'inconnue sous forme de quantité cachée dans une séquence d'enseignement sur l'algèbre au secondaire. Le degré d'aide apporté par la représentation concrète diminue progressivement, et, vers la fin du travail sur une structure, les enfants sont amenés à compléter des équations à partir de l'écriture seulement.

Des apprentissages significatifs

Vers la fin de notre séquence d'enseignement, Mathieu avait réalisé des apprentissages significatifs et était maintenant en mesure de concevoir le signe = comme un indicateur d'une relation d'équivalence dans différentes situations. Prenons à titre d'exemple une situation de la dernière séance avec Mathieu, où nous lui demandions de déterminer si on peut insérer le signe = entre 3 + 4 et 7 + 1. Pour réaliser cette activité, Mathieu pouvait, s'il le souhaitait, avoir recours à des objets qui avaient été mis à sa disposition.

Ens. :	Est-ce que tu peux me dire si on peut mettre un signe = ici ?
Mathieu :	Je vais aller voir, je ne suis pas certain (il met deux sous-ensembles de 3 jetons et 4 jetons sur la feuille de gauche et deux sous-ensembles de 7 jetons et 1 jeton sur la feuille de droite.) Non. Parce que, ici (montre à gauche), il y en a 7, et ici 8 (montre à droite).
Ens. :	Qu'est-ce qu'il faudrait changer pour que tu puisses le mettre ?
Mathieu :	Il faudrait faire + 1 (remplace 7 + 1 par 6 + 1)
Ens. :	Est-ce que tu peux me lire ce qui est écrit ?
Mathieu :	3 + 4 = 6 + 1.
Ens. :	Pourquoi est-ce que c'est correct maintenant ?
Mathieu :	Parce qu'on a changé quelque chose maintenant. Au lieu d'obtenir 8, on a 7 de ce côté (à droite).

Dans cette situation, Mathieu conçoit donc le signe = comme un indicateur d'une relation d'égalité. Contrairement aux réponses qu'il a données lors de l'entrevue initiale, pour lui 3 + 4 = 6 + 1 est une expression mathématique authentique. Cependant, les progrès évidents que Mathieu a réalisés au cours des quatre semaines que nous avons travaillé avec lui ne permettent pas de conclure que cet apprentissage est facile à réaliser pour un enfant de cet âge.

Un obstacle cognitif important

Même si Mathieu a réussi à progresser tout au long de la séquence d'enseignement, l'apprentissage du signe = en tant qu'indicateur d'une relation d'équivalence reste pour lui un puissant obstacle cognitif. Trois types d'observations nous permettent d'en arriver à ce constat. En premier lieu, après l'explication du signe = lors de la première séance, Mathieu est réticent à modifier sa conception initiale de ce signe. En deuxième lieu, la compréhension du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence dans un certain type de situation ne garantit pas que la signification attribuée à ce signe sera la même dans d'autres situations. En troisième lieu, une dizaine de jours seulement après la fin de la séquence d'enseignement, lors d'un post-test, nous avons déjà pu observer une tendance chez Mathieu à revenir à une conception du signe = comme opérateur dans certaines situations. Nous donnons ci-dessous quelques détails concernant ces trois observations.

Première observation : Difficile construction d'une nouvelle signification au signe =

Lors de la première séance, nous avons placé deux ensembles de 5 et 3 jetons de même taille sur une feuille, à gauche, et un ensemble de 8 jetons, sur une feuille, à droite (voir figure 1). Mathieu devait déterminer s'il y avait la même quantité de part et d'autre et s'il était possible de mettre le signe =.

Ens. :	Est-ce qu'on peut mettre le signe = entre les deux cartons? (entre 5 + 3 et 8)

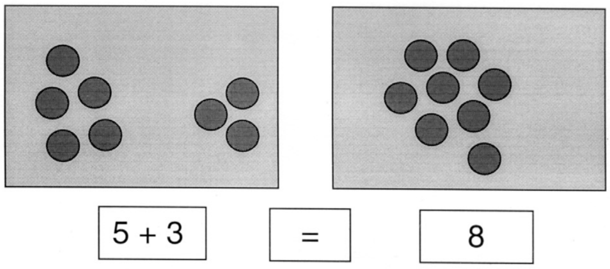

Figure 1: Représentation de 5 + 3 = 8.

Mathieu : Oui, ici (montre les deux ensembles de 5 et 3), c'est un calcul et ici, c'est le résultat (montre l'ensemble de 8 jetons).

Ens. : Qu'est-ce qu'il signifie, le signe = ici?

Mathieu : C'est la même chose. Ici, il y en a 5 et 3 (montre les objets sur la feuille de gauche) et c'est la même chose que 8 (montre les 8 objets sur la droite).

Par la suite, les deux cartons ont été inversés, et Mathieu devait à nouveau décider si la même quantité d'objets était présente sur chacune des deux feuilles et se prononcer sur la possibilité d'insérer le signe = entre les nombres 8 et 5 + 3 (voir figure 2).

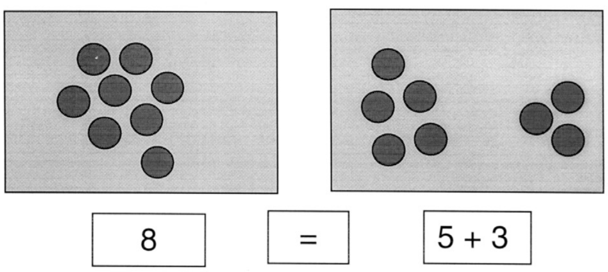

Figure 2: Représentation concrète de 8 = 5 + 3.

Mathieu : Ça ne fonctionne pas. On ne peut plus mettre le signe = maintenant.

Ens. : Pourquoi pas?

Mathieu : Ça marche seulement si on le fait dans l'autre sens (5 + 3 = 8). Mais comme ceci (8 = 5 + 3), ça ne fonctionne pas. On ne peut pas faire de calcul.

Ens. : Est-ce qu'il y a autant d'objets sur cette feuille que sur cette feuille?

Mathieu : Oui

Ens. : Le signe =, on le met, s'il y en a la même quantité d'un côté que de l'autre côté. Si ce signe signifie qu'il y en a autant des deux côtés, est-ce qu'on peut mettre le signe ici ?

Mathieu : Non. Ici, il y en a 8, c'est les tiens, et ici il y a ceux-ci, c'est les miens. Est-ce que ça donne la même chose ? Je fais ça (réunion des 5 + 3 en un ensemble de 8), parce que, alors, on en a autant, toi que moi.

Ens. : Alors, est-ce qu'on peut mettre le signe égal?

Mathieu : Oui, ça fonctionne.

Ens. : Peux- tu me lire ce qui est écrit?

Mathieu : Ce serait mieux de lire comme ça (de droite à gauche). Parce qu'on peut lire le calcul, et après =, voir si c'est la même chose, mais 8 = 5 + 3, ça ne donne rien.

Si Mathieu accepte ici notre explication, il tient cependant à une lecture de droite à gauche de l'égalité. De cette manière, il réussit à la ramener à une structure qui reste cohérente avec une conception du signe = comme opérateur. La conception du signe = comme une incitation à écrire une réponse est suffisamment bien ancrée pour que tous nos participants essaient, d'une façon ou d'une autre, de la maintenir.

Deuxième observation : Retour vers une conception du signe = comme opérateur

Tout au long de la séquence d'enseignement, Mathieu a tendance à régresser dans sa compréhension du signe = en lui attribuant le sens d'opérateur. Ce phénomène apparaît surtout lorsque Mathieu est confronté à des situations qui sont nouvelles pour lui. Dans certaines situations, Mathieu *transforme l'égalité* de telle sorte que le signe = peut être vu comme un opérateur. Dans d'autres situations, il insiste sur une *lecture de droite à gauche*. Voici un exemple de chaque situation.

La transformation de l'égalité: Vers la fin de la séquence d'enseignement, Mathieu doit déterminer l'inconnue dans l'expression __ + 4 = 2 + 8. Pour l'aider, nous avons représenté la situation devant lui, avec, sur une feuille à sa gauche, une boîte en carton non transparente qui contient six jetons et un ensemble de quatre jetons et, à sa droite, une feuille avec deux sous-ensembles de deux et de huit jetons. Mathieu doit alors déterminer combien de jetons se trouvent dans la boîte si on peut mettre le signe = entre __ + 4 et 2 + 8 (voir figure 3).

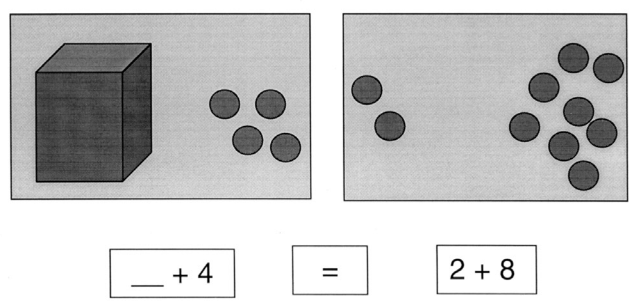

Figure 3: Représentation concrète de __ + 4 = 2 + 8.

Ens. : Si je mets un = ici, combien y en a-t-il dans la boîte ?

Mathieu : Il y en a 4, parce que 4 + 4, ça fait 8.

Ens. : Peux-tu lire ce qui est écrit?

Mathieu : 4 + 4 = 2 + 8.

Dans cette situation, on peut donc constater que Mathieu choisit un nombre qui lui permet d'obtenir une somme identique au dernier nombre de l'égalité (8). En même temps, il a ignoré, même avec la représentation concrète sous ses yeux, le sous-ensemble de deux jetons, ce qui l'amène à transformer l'égalité en une structure a + b = c, qui lui permet de maintenir une conception du signe = comme un opérateur.

Lecture de droite à gauche: Occasionnellement, surtout durant les premières séances, Mathieu utilise la lecture de droite à gauche pour transformer une égalité en une structure a + b = c. Par exemple, lorsqu'il doit résoudre, à partir de l'écriture symbolique uniquement, l'équation 7 = 2 + __, Mathieu veut d'abord inscrire 9. Ensuite, c'est la lecture à l'envers qui lui semble être la stratégie la plus adéquate. *Est-ce que je peux lire aussi dans l'autre sens (de droite à gauche) ?* Questionné sur les raisons qui l'incitent à inverser le sens de la lecture, Mathieu fait explicitement référence à une transformation en une structure a + b = c. *On met toujours le calcul au début, et après le résultat*. On peut donc constater qu'il y a un manque réel de compréhension de la situation, et que c'est ce manque qui incite Mathieu à lire l'égalité de droite à gauche.

Troisième observation : Faible rétention lors du post-test

Un troisième facteur qui illustre la puissance de l'obstacle cognitif que constitue l'apprentissage du signe = est la faible rétention observée chez Mathieu lors du post-test, une dizaine de jours à peine après la fin de la séquence d'enseignement. En effet, après une période quand même assez courte sans enseignement du signe =, nous avons pu observer le début d'un retour vers une conception du signe = comme opérateur.

Même si Mathieu utilise en général le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence au post-test, ses apprentissages restent assez fragiles puisque, dans certaines situations, il amorce un retour vers une conception du signe = comme opérateur. Ainsi, au tout début de la séance du post-test, Mathieu insiste pour lire, de droite à gauche, l'égalité 8 = 4 + 4 .

Ens. :	Peux-tu me dire si ce qui est écrit ici (8 = 4 + 4) est juste.
Mathieu :	Oui, c'est juste, parce que 4 + 4, c'est 8.
Ens. :	Peux-tu me lire ce qui est écrit?
Mathieu :	8 + … Non, ça ne marche pas. Mais il faut toujours commencer du côté de la fenêtre. 4 + 4 = 8.
Ens. :	Pourquoi lis-tu dans ce sens maintenant?
Mathieu :	Parce qu'on lit toujours de cette manière. Il faut toujours commencer du côté de la fenêtre.

Dans la salle de classe, les fenêtres se situent effectivement du côté gauche et leur emplacement coïncide alors avec le côté du début de la lecture. Pour la séance du post-test cependant, nous avions amené Mathieu dans un local différent, dans lequel les fenêtres étaient situées à sa droite. Ce changement d'emplacement a suffi pour inciter Mathieu à inverser le sens de lecture de l'égalité.

Les apprentissages de Mathieu sont donc loin d'être définitifs, même si, lors de la séquence d'enseignement, ses explications peuvent paraître convaincantes. Le phénomène de régression fournit ainsi un indice supplémentaire que l'apprentissage du signe = est un puissant obstacle cognitif. La représentation du signe = comme opérateur est fortement ancrée chez les enfants et il est très difficile pour les participants à notre recherche de dépasser de manière définitive cette conception.

Discussion des résultats

Notre travail avec les élèves de première année d'études a démontré qu'il est possible de faire avancer des élèves de cet âge dans la compréhension du signe =. Ceci n'est d'ailleurs pas uniquement le cas pour Mathieu. Les autres enfants avec lesquels nous avons travaillé ont également montré des progrès significatifs. Ces résultats rejoignent ceux des études de Falkner, Levi et Carpenter (1999), Carpenter et Levi (2000) ainsi que de Behr, Erlwanger et Nichols (1980) qui en sont arrivés à la conclusion que leur enseignement du signe = en première année permettait aux enfants de cheminer vers une compréhension plus adéquate de ce signe.

Les progrès ne se réalisent cependant pas sans un enseignement qui se penche spécifiquement sur les conceptions erronées des enfants quant au signe =. La conception très répandue de ce signe comme un opérateur lors du prétest et les difficultés qui y sont rattachées montrent que, lorsque le signe = n'est pas enseigné explicitement, les enfants ne le comprendront pas comme un indicateur d'une relation entre deux nombres. Carpenter, Franke et Levi (2003) en sont arrivés au même constat : selon ces auteurs, l'apprentissage du signe = n'est pas simplement un effet de maturation, mais les conceptions erronées des enfants doivent être affrontées directement.

Par ailleurs, les progrès, visibles chez tous les participants de notre recherche, ne sont pas faciles à réaliser. Nous avons constaté, non seulement chez Mathieu, mais également chez les autres enfants avec lesquels nous avons travaillé, que l'apprentissage du signe = est un puissant obstacle cognitif pour des élèves de première année d'études.

En ce qui concerne la réticence des enfants à modifier leur conception du signe =, nos résultats vont dans le même sens que ceux obtenus par Sáenz-Ludlow et Walgamuth (1998) qui ont constaté auprès d'enfants de troisième année que ceux-ci ont beaucoup de difficultés à se détacher de leur conception initiale du signe = comme opérateur, défendant même leur point de vue de manière assidue :

> the dialogues and the arithmetical tasks on equality indicate these children's intellectual commitment, logical coherence, and persistence to defend their thinking unless they were convinced otherwise. (Sáenz-Ludlow et Walgamuth, 1998, p. 185)

Quant à la faible rétention des apprentissages, nos résultats rejoignent ceux de Falkner, Levi et Carpenter (1999). Après avoir enseigné la signification du signe = à l'aide d'égalités de structure a = b + c aux enfants de niveau préscolaire, ces chercheurs ont constaté que cet apprentissage ne se généralise pas à des structures jusque-là inconnues aux enfants. Lorsque ces mêmes enfants sont confrontés à une égalité de structure a = a, ils admettent qu'il s'agit deux fois de la même quantité, tout en refusant d'écrire une telle expression.

Cette fragilité des apprentissages que nous avons notée se retrouve aussi dans les recherches de Carpenter et Levi

(2000), visant à enseigner le signe = à des enfants de première année. Les apprentissages concernant le signe = réalisés par ces enfants semblent ne pas être stables dans le temps. Des enfants qui étaient en mesure dans un premier temps d'utiliser le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence dans différentes situations, n'ont pas su retenir certains de ces apprentissages. Quelques mois après l'enseignement explicite du signe =, une partie d'entre eux était retournée vers une conception du signe = comme opérateur lorsqu'il s'agissait d'évaluer une égalité de structure a + b = c + d. Carpenter, Franke et Levi (2003) recommandent dès lors de continuer à exposer les enfants à des égalités qui ne correspondent pas à une structure de type a + b = c.

La profondeur avec laquelle une conception du signe = comme opérateur est ancrée déjà chez des enfants de première année du primaire, ainsi que la difficulté de les faire surpasser cette conception, pose cependant la question de la pertinence de l'introduction de ce symbole dès le tout début du primaire. En effet, comme le souligne Dougherty (2004), une introduction précoce du signe = comme opérateur signifie qu'il faudra défaire les conceptions des enfants plus tard :

> In order, then, for older children to solve equations with meaning, we have to first 'undo' their idea about the equals sign before any approach to solving equations makes sense. (Dougherty, 2004, p. 29)

Dougherty suggère alors de faire travailler les enfants sur les relations d'égalité au niveau concret, dans un contexte de mesure, avant de les aborder dans un contexte numérique :

> Showing that students can solve equations with different methods at an earlier age is encouraging. If they are capable of using these methods, even after coming from an almost strictly numerical perspective in their early beginnings in mathematics, what would be possible if students started with a focus on the structure of mathematics within a measurement context? (Dougherty, 2004, p. 29)

Face à ce constat, on peut alors se demander s'il ne serait pas plus pertinent de retarder de quelques mois l'introduction de ce symbole afin de s'assurer que les enfants soient davantage prêts à le comprendre comme un indicateur d'une relation d'égalité. Toutefois, il ne faut pas oublier que de nombreux enfants arrivent déjà avec une conception du signe = comme opérateur à l'école. En effet, ce signe est présent dans de nombreux livres d'enfants destinés à apprendre le dénombrement, ce qui amène nécessairement les enfants à s'en construire une représentation avant même l'entrée à l'école. Nous croyons qu'il est important de tenir compte de ce facteur lors de l'introduction du signe = au début du primaire. Une autre avenue serait de remplacer le signe = par un autre symbole (par exemple une flèche) lors des toutes premières opérations arithmétiques sur le nombre. Une telle mesure contribuerait-elle à éviter l'apparition de conceptions erronées difficiles à modifier par la suite ? Tant de questionnements qui demandent que d'autres recherches se penchent sur ce sujet.

Notes

[1] Cet article provient d'une recherche financée par une bourse de formation-recherche du ministère de la culture, de l'enseignement supérieur et de la recherche du Luxembourg (référence 99/028). Les idées exprimées dans cet article ne reflètent pas nécessairement celles du ministère. You will find an abstract, in English, for this article on the flm web-site: http://www.flm.math.ca.

References

Behr, M., Erlwanger, S. et Nichols, E. (1980) 'How children view the equals sign', *Mathematics Teaching* **92**, 13-15.

Bodin, A. et Capponi, B. (1996) 'Junior secondary school practices', dans Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. et Laborde, C. (dirs.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp. 565-614.

Brizuela, B. et Schliemann, A. (2004) 'Ten-year-old students solving linear equations', *For the Learning of Mathematics* **24**(2), 33-40.

Carpenter, T. et Levi, L. (2000) *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades* (Research Report 00-2), Madison, WI, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carpenter, T., Franke, M. et Levi, L. (2003) *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*, Portsmouth, NH, Heinemann.

Ministère de l'Éducation et de la Formation de l'Ontario (1997) *Curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année, Mathématiques*, Ottawa, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario (http://www.edu.gov.on.ca).

Dickinson, P. et Eade, F. (2004) 'Using the number line to investigate the solving of linear equations', *For the Learning of Mathematics* **24**(2), 41-47.

Dougherty, B. (2004) 'Early algebra: perspectives and assumptions', *For the Learning of Mathematics* **24**(3), 28-30.

Falkner, K., Levi, L. et Carpenter, T. (1999) 'Children's understanding of equality: a foundation for algebra', *Teaching Children Mathematics* **6**(4), 232-236.

Kaput, J. et Blanton, M. (2000) *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: making it implementable on a massive scale*, Rapport de recherche. Université du Massachusetts, Dartmouth, MA. Document ERIC ED 441 663.

Kieran, C. (1992) 'The learning and teaching of school algebra', dans Grouws, D. (dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, NY, Macmillan Publishing Company, pp. 390-419.

National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principle and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.

Radford, L. et Grenier, M. (1996) 'Entre les choses, les symboles et les idées… une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre', *Revue des sciences de l'éducation* **22**(2), 253-276.

Sáenz-Ludlow, A. et Walgamuth, C. (1998) 'Third graders' interpretation of equality and the equal symbol', *Educational Studies in Mathematics* **35**(2), 153-187.

Shoecraft, P. (1989) '"Equals" means "Is the same as"', *The Arithmetic Teacher* **36**(8), 36-40.

Smith, J. (2002) 'Connecting undergraduate number theory to high school algebra: a study of a course for prospective teachers', *Proceedings of the 2nd international conference on the teaching of mathematics*, Hersonnisos (Grèce), Wiley Publishers (disponible au site: http://server.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap128.pdf)

Vance, J. (1998) 'Number operations from an algebraic perspective', *Teaching Children Mathematics* **4**(5), 282-285.