

REGARDS CROISÉS SUR L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES : TSD ET TID

ELENA POLOTSKAIA

La *course à vingt* est un jeu dans lequel les joueurs prennent à tour de rôle un ou deux jetons d'une ligne de vingt jetons. Celui qui prend le vingtième gagne la partie. Brousseau (2004) propose un scénario didactique incluant ce jeu pour permettre un apprentissage des mathématiques chez les élèves. Comment peut-on comprendre les mécanismes didactiques impliqués du point de vue de deux théories différentes? Je propose d'interroger la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 2004) et la Théorie de l'Instruction Développementale [1] (TID, Davydov, 2008) à travers l'exemple de la course à vingt.

Des origines et des quêtes bien distinctes

En quelques mots, la Théorie de l'Instruction Développementale prend ses racines dans les travaux de Vygotsky sur la nature sociohistorique de l'enseignement et de l'apprentissage vus comme des phénomènes socioculturels. Dans son livre, Davydov intègre et synthétise des travaux théoriques de plusieurs chercheurs réalisés sur plus de 40 ans [2]. Il emploie le concept d'« activité » [3] (*деятельность, deiatelnost*, qui décrit toute activité humaine ayant une forme et une structure développée par une société au cours de son histoire) et le concept « d'activité d'apprentissage » et même « d'apprentissage conscient » (qui selon lui implique un « raisonnement théorique » de la part de l'élève). Selon la théorie, ce type d'activité doit être développé chez les élèves pour assurer un apprentissage efficace et, surtout, un développement intellectuel et personnel. La TID accorde une grande attention à l'analyse de la genèse cognitive et historique (analyse épistémologique) des concepts mathématiques pour concevoir un curriculum spécifique permettant le développement de l'activité d'apprentissage conscient chez les apprenants.

Depuis les années 70, les travaux de Brousseau ont donné naissance à la Théorie des Situations Didactiques qui est devenue un noyau de recherches en didactique des mathématiques dans le monde francophone et ailleurs. En étudiant la classe de mathématique, Brousseau cherche à modéliser de l'enseignement par un découpage en situations permettant l'acquisition de savoirs. Grâce à cette théorie, le concept de « situation didactique » et de différentes composantes essentielles de l'organisation des apprentissages a pris de l'ampleur dans les recherches en didactique. Par situation didactique on comprend généralement un ensemble de rapports (en lien avec l'apprentissage) établis explicitement ou implicitement entre un élève et son environnement (par exemple, système éducatif, comportement de l'enseignant, la tâche, etc.) dans le processus d'apprentissage. L'observation et l'analyse des pratiques d'enseignement sous cet angle ont

donné naissance à plusieurs concepts didactiques importants : situation a-didactique, milieu, contrat didactique, temps didactique, mémoire didactique, ingénierie didactique, etc.

Radford suggère que « even the simplest connection [between theories] requires *dialogue* » (2008, p. 318), or le dialogue est unimaginable sans une langue commune. Il faut d'abord s'assurer de bien comprendre le sens attribué aux concepts centraux de chaque théorie. Par exemple, Davydov parle de *transfert* de connaissances et Brousseau mentionne la *construction* de connaissances. S'agit-il de compréhensions antagonistes du phénomène d'apprentissage? Je n'envisage pas de répondre entièrement à cette question ici, mais plus modestement de comparer quelques concepts en utilisant le contexte de la course à vingt. J'aimerais voir à quel point on peut interpréter conjointement les concepts proposés par les deux théories sans heurter d'obstacles majeurs. Cet exercice nous permettra de voir comment ces deux théories éclairent différemment certains phénomènes, et d'identifier des points (de divergence?) à explorer.

Quelques concepts de base

On voit donc que la TID et la TSD sont très distinctes du point de vue des origines et de leurs quêtes. La TSD est une théorie « didactique » née dans la recherche de réponses aux processus insatisfaisants de l'enseignement des mathématiques en classe (ce qui est un but spécifique), alors que la TID est une théorie « psychologique » qui a pour objectif le développement personnel de l'enfant en tant que citoyen futur (objectif très large). Cette différence n'empêche cependant pas les deux théories de se croiser en plusieurs points. Regardons de plus près comment certains concepts employés par ces deux théories se comparent pour mettre en lumière des nuances importantes.

La pensée et l'abstraction

La pensée et l'abstraction sont au cœur des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques. Une activité comme la course à vingt y trouve sa place parce qu'elle engage les joueurs à réfléchir mathématiquement sur le fonctionnement du jeu. Mais que dire de cette réflexion?

La TID fait la distinction entre une pensée empirique et une pensée théorique. Pour expliquer la pensée empirique, Davydov écrit :

[empirical thinking is] interpreting the general merely as that which is identical and similar in some group of objects, [...] interpreting the essential merely as the distinguishing attribute of a class of objects. (2008, p. 76)

On peut dire que, selon Davydov, la pensée empirique est une généralisation à partir d'attributs observables des objets étudiés. Cette généralisation sert à distinguer une classe d'objets de l'autre. La pensée empirique ne cherche pas à comprendre les relations internes et externes entre les attributs, car ces relations ne sont pas directement observables dans un objet statique qui n'est pas en développement ou en interaction avec les autres objets. Ceci est le rôle de la pensée théorique, qui cherche à comprendre l'objet plutôt qu'à le décrire. La pensée théorique explique la raison d'être interne et externe de l'objet, pourquoi il existe tel qu'il est, et comment il se lie et interagit avec le monde. Selon Davydov, la pensée théorique est le processus de rendre visible ce qui est invisible, l'objectivation des relations implicites de l'objet et de sa structure. C'est la pensée théorique qui soutient principalement le développement psychologique de l'enfant et permet la croissance de ses capacités cognitives. Cette distinction entre la pensée théorique et la pensée empirique semble similaire à celle proposée par Piaget (1978) quand il distingue une abstraction « empirique » d'une abstraction « réfléchissante ».

Si on pense à la course à vingt, la TID nous invite donc à distinguer la reconnaissance des faits (par exemple : « celui qui gagne prend le 20, le 17, le 14, *etc.* ») de la reconnaissance de la relation mathématique entre ces nombres (par exemple : que ces nombres sont équivalents modulo trois). Le premier est le fruit d'une pensée empirique. Le deuxième est celui de la pensée théorique.

Le processus d'abstraction évoqué par la TSD de Brousseau reflète une idée similaire à la pensée théorique. Discutant les idées de Dienes, Brousseau accepte que :

L'abstraction consiste alors à identifier, en tant qu'objet de connaissance la « structure commune » à divers jeux isomorphes. La structure est ici l'ensemble des propriétés qui, indépendamment des particularités de chaque exemple, les régissent tous. (2004, p. 192)

Cette définition de l'abstraction fait appel à l'idée de structure : par exemple à l'ensemble de ce qui régit un jeu comme la course à vingt. Par contre, on ne distingue pas clairement les propriétés qui sont observables ou non, et si l'ensemble inclut les relations internes et externes. La TSD insiste de manière précise sur ce qui est vu comme la raison d'être du jeu : dans la course à vingt, les règles du jeu déterminent entièrement la connaissance potentiellement développée en jouant. De ce point de vue, donc, la TID apporte des distinctions intéressantes par rapport à la TSD. Elle nous invite à revoir ce qu'on croit que les élèves doivent dégager d'une situation en reconnaissant la part jouée par pensée empirique.

À la lumière de la TID, l'idée de pensée empirique nous amène à distinguer clairement les règles du jeu, qui sont explicites et immédiatement disponibles, des lois mathématiques internes (la divisibilité/comparabilité) qui sont implicites et « à comprendre ». En effet, on peut toujours gagner à la course à vingt en utilisant la connaissance empirique des nombres « gagnants », qui reposent sur les règles de cette version particulière du jeu. On peut empiriquement dégager la suite de nombres et ainsi apprendre tout simplement à produire la série « 2, 5, 8, *etc.* » afin de gagner. Mais ce n'est pas évidemment le savoir visé.

Quel est ce savoir? Dans son livre, Brousseau parle de la course à vingt comme moyen d'aborder le concept de division comme soustraction répétée (avec un reste), et pour l'introduction de la culture de preuve en mathématique, dans la mesure où on fait le jeu en demandant aux élèves de formuler et justifier une stratégie gagnante. Du point de vue de la TID, par contre, en plus de la preuve c'est surtout la relation mathématique entre les nombres « gagnants » qui serait la raison d'être du jeu : on peut en effet observer comment ces nombres sont équivalents en arithmétique modulaire, principe pouvant être généralisé à d'autres nombres ou règles. Les deux notions sont évidemment reliées, mais la TID, en réfléchissant en termes de pensée théorique, appelle à une réflexion plus large sur les relations impliquées. On verra un peu plus loin comment ceci, à mettre en lien avec les orientations particulières de chacune des théories (discutées à la section précédente), se rattache à une certaine vision de développement de l'enfant.

Concepts (ou notions)

Dans la TSD, l'idée d'une structure et de règles qui régissent un jeu (ou un problème) implique l'existence d'un processus d'assimilation de cette structure ou des règles, et par là de développement de *notions/concepts* [4] mathématiques chez les élèves qui jouent au jeu (ou résolvent le problème). Davydov propose de regarder le concept selon deux perspectives : comme forme de réflexion mentale et comme forme d'activité humaine. Il explique :

Here a concept is a form of thinking activity that reproduces an idealized object together with its system of links. [...] The concept is simultaneously both a form of reflection of the material object and a means for mentally reproducing or constructing it. (2008, pp. 90-91)

Selon Davydov, le concept comme forme de réflexion mentale est un instrument qu'utilise le penseur pour comprendre l'objet et opérer sur lui. Le concept comme forme d'activité humaine, lui, permet à Davydov d'établir une relation génétique entre un savoir (scientifique) et son développement au sein d'un processus historique. Une fois développé, le savoir fait partie de la culture, commence à déterminer des activités humaines et devient leur forme. Davydov affirme que les humains, et spécifiquement les enfants, ont la possibilité de saisir la forme d'une activité et de la transformer en forme de pensée. Par exemple, les enfants s'approprient les concepts sociaux et moraux en participant à des activités sociales et culturelles. Leurs actions dans ces activités se transforment en actions de pensée. Concrètement, on reconnaît ceci dans la partie du jeu de la course à vingt qu'on relie à la preuve. Avec ce jeu, les élèves sont appelés à valider et justifier leurs stratégies. Participer à cette partie du scénario peut former chez les élèves le concept de preuve mathématique comme un élément de la culture mathématique, et cela même si le concept de preuve ne fait pas l'objet d'une réflexion formelle.

Dans un cadre similaire, Brousseau emploie les termes *notion* et *théorie*. Dans la TSD, une notion représente une clé, un instrument mental pour aborder (comprendre et résoudre) un ensemble de situations partageant des caractéristiques importantes. Dans les situations de validation et

d'institutionnalisation, les élèves discutent de leurs théories (partielles ou même incorrectes) pour arriver à une compréhension commune institutionnalisée. Brousseau explique l'émergence d'une notion pour l'apprenant comme suit :

Mais pour que ces théories aient un sens pour celui qui les utilise, il « faut » qu'elles aient préalablement fonctionné comme solution à un problème posé à chaque élève dans des conditions qui lui permettent, soit de trouver lui-même cette solution, ou plus exactement de la construire (éventuellement progressivement), soit de l'emprunter toute faite, de lui-même, entre plusieurs qu'il pouvait envisager sans qu'une intention didactique ou une pression culturelle l'y contraigne en se substituant à son jugement. (2004, p. 218)

On voit que ce qui intéresse surtout Brousseau ce sont des connaissances en particulier. Dans le cas de la course à vingt, Brousseau parle des stratégies pour gagner la partie, et c'est la division (par soustraction répétée) qui est visée. La TSD affirme explicitement qu'une connaissance peut émerger chez l'apprenant par ses interactions avec des situations ayant cette notion comme solution. Toutefois, Brousseau reconnaît que la seule participation au jeu (situation d'action), bien qu'il occupe la place importante dans la TSD, n'est pas suffisante pour provoquer une généralisation et la formation du concept. Les situations de formulation-validation-institutionnalisation, gérées par l'enseignant, sont nécessaires. L'action individuelle de l'élève dans l'apprentissage est traitée différemment dans le cadre de la TID.

La distinction vient sans doute du fait que Brousseau suggère très nettement un détachement, pour lui, entre l'action individuelle et l'activité sociale, insistant sur l'absence de « pression culturelle » (voire la pression de la part de l'enseignant) dans la situation d'action. Du côté de la TID, cette séparation n'est pas envisageable, car c'est l'enseignant qui est responsable d'orienter l'élève vers la pensée théorique, pour que l'élève ne reste pas au niveau superficiel de son objet d'étude. Par contre, les actions concrètes de l'élève ne sont pas nécessairement visées par cette orientation. En général, l'action de l'individu s'inscrit *toujours* dans une forme d'activité (ou situation) qui fait pression sur lui. Toutefois, cette pression peut le diriger vers des buts variés. Par exemple, l'enseignant peut suggérer une étude systématique du jeu de la course à vingt plutôt que de proposer de jouer plusieurs parties en espérant que les élèves découvrent quelque chose par eux-mêmes. On peut tout de même penser que les moments identifiés par la TSD (par exemple, l'institutionnalisation) sont là pour fournir cette orientation et cette « pression culturelle » tellement valorisée par la TID.

On note alors que la TID ne préconise pas nécessairement l'obligation pour chaque élève, ni pour le groupe, de « trouver lui-même ». Pour clarifier cette différence, nous allons discuter des nuances dans la manière dont les deux théories reconnaissent la situation et l'activité structurée comme sources principales du développement de connaissance chez l'apprenant.

Les savoirs et leur développement

Selon la TSD, le processus de développement d'une connaissance particulière (lire concept) chez les élèves comprend

plusieurs étapes consécutives : situation d'action, situation de communication, situation de validation et situation d'institutionnalisation. Dans la situation d'action, l'apprenant doit construire un outil mental pour résoudre un ou plusieurs problèmes concrets. Dans la course à vingt, on joue jusqu'à ce que certains élèves découvrent ce qu'il faut faire pour gagner. Ensuite, dans la situation de communication, l'apprenant doit reconnaître cet outil comme ayant assez de valeur pour le formuler explicitement et le communiquer à d'autres : il doit expliquer comment faire pour gagner. La situation de validation permet à l'apprenant de confirmer de façon explicite et logique la validité de la conception : il doit expliquer et valider sa stratégie mathématiquement. Dernièrement, dans la situation d'institutionnalisation, l'apprenant devrait modifier sa conception pour l'adapter à une forme culturellement établie, ainsi que la mettre en rapport avec d'autres notions existantes (par exemple, la notion de division dans les nombres entiers plus généralement). Travailler dans le cadre de la TSD consiste à établir un développement d'un savoir sous forme d'un outil pour résoudre un problème concret avant d'étudier le concept lui-même en tant qu'objet de savoir. On remarquera en particulier une sorte de progression allant du particulier vers le plus général.

La façon d'organiser le processus d'apprentissage dans le cadre de la TID diffère formellement de la description donnée par la TSD. Davydov suggère qu'un enfant peut saisir l'idée générale directement à partir d'une activité humaine structurée culturellement et historiquement. Pour cette raison, la TID suggère que l'acquisition d'un concept doit commencer par la saisie de sa forme la plus générale. Ainsi, du point de vue de la TID on peut regarder la course à vingt comme une activité dont le but est d'immerger l'élève dans la culture mathématique de preuve. L'apprentissage d'une notion comme la division devrait en effet, selon cette théorie, réalisée de manière différente. Il faudrait la situer dans un continuum prenant racine dans le concept de nombre, lui-même pensé plus généralement à travers la notion de grandeur (quantité indéterminée) et les relations entre les grandeurs. La notion de grandeur est alors à travailler avec l'idée de comparaisons (additives et multiplicatives) entre des objets physiques (et leurs propriétés mesurables, dont la longueur, la superficie, le volume ou le poids). On va donc déjà aborder les « opérations » et les relations sans les nombres. On peut par exemple saisir et formuler une loi de commutativité à partir de la manipulation d'objets de longueurs variés, puis l'appliquer aux nombres ou expressions algébriques. La course à vingt ne serait alors pas l'occasion d'une « découverte », mais plutôt de l'enrichissement d'une certaine forme de pensée.

The children first discover the initial general relation in some field of study. Then they use it to construct a contentful generalization, and then they use that to determine the content of the 'cell' of the subject, converting it into a means for deriving other, more particular relations—i.e. into a concept. (Davydov, 2008, p. 122)

Cela dit, un regard plus pointu sur la TID révèle que la différence « général-particulier » concernant l'ordre de

développement d'un concept est plutôt superficielle du point de vue des scénarios didactiques. Les deux théories préconisent le développement d'un nouveau savoir en commençant par des activités concrètes, dans des contextes particuliers. La différence concerne principalement le choix explicite de la forme la plus généralisable du concept (et ainsi du contexte de l'activité à utiliser au début) que la TID préconise. C'est à partir de ce contexte particulier (une activité ayant une forme particulière) que l'étude théorique du concept se réalise. Cette étude théorique se fait toujours à partir d'une activité pratique (comme de comparer des objets, ou jouer à un jeu) et semble rejoindre plusieurs aspects de la formulation-validation-institutionnalisation de la TSD mais sans disposer du langage particulier qui permet à la TSD de si bien les découper et de décrire le rôle didactique de chaque type de situation. Mais on insistera du côté de la TID pour dire qu'une situation comme la course à vingt ne permet pas à l'élève de saisir directement la relation mathématique à l'origine du concept visé : la soustraction répétée ne représente pas le vrai caractère de la relation de comparabilité (par modulo) malgré le lien entre les deux. On notera aussi qu'elle n'engage pas l'élève à réaliser les limites de sa connaissance à ce sujet dès le début. Discutons ceci un peu plus en détail.

Un élément important du point de vue des connaissances et leur développement qui distingue les deux théories concerne la place accordée aux « ruptures ». La TSD accorde une attention spéciale au phénomène de conflit sociocognitif et aux obstacles d'apprentissage qui peuvent se présenter lors de la rencontre d'une nouvelle notion. Selon Brousseau, les élèves peuvent « naturellement » former et utiliser des conceptions qui peuvent être en conflit avec l'apprentissage désiré et ainsi représenter un obstacle. La TSD énonce que les situations d'apprentissage (entre autres la dévolution et la validation par les pairs) doivent être spécifiquement élaborées de manière à minimiser les obstacles, tout en reconnaissant que certains conflits cognitifs sont inévitables.

Concernant l'idée d'une progression du général au particulier, la TID aborde ceci différemment. Dans le cadre de ces études, Davydov a réalisé un tel projet d'enseignement, qui aujourd'hui est connu comme le curriculum de El'konin-Davydov (Schmittau, 2011). Ce curriculum est construit, selon la TID, pour permettre de travailler d'abord les concepts génétiquement plus généraux. Les autres connaissances, dérivées et plus particulières, peuvent donc se développer par la suite comme enrichissement de la pensée générale de base sans provoquer de nombreuses ruptures de sens. Par exemple, le concept de nombre est présenté dès le début du point de vue des propriétés qui sont communes à tous types de nombres et grandeurs (l'ordre, l'égalité, l'infériorité, la supériorité, etc.). On les construit d'abord sans nombres, dans le contexte des grandeurs des objets physiques. Les propriétés des nombres naturels seront donc « tirées » des propriétés plus générales des quantités.

Selon cette logique, comme je le disais plus haut, la course à vingt serait proposée aux élèves à un moment où les élèves maîtrisent déjà le concept de relation multiplicative sur des grandeurs dans sa forme générale et abstraite. Les élèves auraient aussi une compréhension large du système positionnel de base 10, vue comme un parmi d'autres sys-

tèmes de base. Ainsi, le jeu pourrait être l'occasion de s'intéresser, par exemple, à la manière dont s'écrivent les nombres gagnants dans la course à vingt en base 3 (202, 122, 112, etc.), ce qui permet de remarquer une régularité pouvant être l'occasion d'une autre exploration mathématique intéressante.

Dans un curriculum où on n'aurait pas préalablement travaillé les relations multiplicatives sur la base de la notion de mesure, les élèves introduits à la course à vingt pourraient être naturellement portés à adopter une vision additive de la division (soustraction répétée), et développer par la suite des ruptures cognitives (quand ce modèle ne fonctionne plus, par exemple dans les cas des comparaisons multiplicatives). Bref, c'est dans l'organisation générale du curriculum que la question des conflits cognitifs ou des ruptures logiques est essentiellement abordée par la TID. Cette théorie ne propose donc pas d'outils didactiques pour remédier à une rupture, si une telle situation arrive dans l'apprentissage.

La TSD reconnaît évidemment l'intérêt d'une réflexion liée à l'ordre dans lequel les savoirs sont enseignés. Parlant des décimaux Brousseau énonce :

Nous avons vu les insuffisances de cette conception « machinale » et la nécessité de placer cet usage sous le contrôle d'une compréhension et même, dès que possible, d'un savoir rationnel. (2004, p. 291)

Dans cette citation, Brousseau propose de prioriser la connaissance générale sur les nombres rationnels par rapport à la notation décimale des nombres. Ces propos semblent rejoindre l'idée de la TID, qui place la forme la plus générale d'un concept au début pour ensuite en dériver des instances concrètes (dans des contextes mathématiques variés, tels que les nombres entiers, rationnels ou réels). Ainsi, les instances particulières d'un concept ne contrediront pas la forme générale de la connaissance établie à l'origine et ne produiront pas d'obstacle à l'apprentissage. N'ayant pas la forme d'une théorie globale du développement des idées mathématiques, la TSD doit donc (a posteriori) déterminer quand telle ou telle situation serait « le mieux placée », et son projet consiste même souvent, en fait, à élaborer des situations permettant de répondre au besoin de curricula préétablis. La TID de son côté ne permet pas l'élaboration de situation sans une réflexion profonde et une proposition claire sur l'ensemble du curriculum.

Les « forces » amenant l'élève à apprendre

Davydov énonce que la méthode d'apprentissage « de l'abstrait au concret » (qui concerne la conception d'un curriculum plutôt qu'une leçon) contribue au développement de la pensée théorique chez les élèves. Voyons maintenant comment cette approche se distingue de la TSD dans sa manière de voir en contexte éducatif le rôle de l'élève, de la tâche et de l'enseignant.

Les forces internes à l'élève

La conception concrète d'une situation didactique et sa gestion pratique dans les salles de classe sont centrales dans la TSD. De nombreuses situations fondamentales sont conçues sous forme de jeux que les élèves doivent gagner ou des

problèmes qu'ils doivent résoudre. Ceci indique de façon implicite qu'un des éléments nécessaires à l'apprentissage réussi est la disposition naturelle des élèves à vouloir gagner un jeu ou résoudre un problème. Pour la course à vingt, la volonté de gagner est supposée motiver les élèves à rechercher des stratégies gagnantes.

La TID, elle aussi, a une tendance à trouver la force principale de l'apprentissage en l'élève lui-même. Mais Davydov énonce que les enfants plus âgés du préscolaire démontrent un désir accru pour l'apprentissage lui-même, une activité socialement valorisante. L'enfant aurait donc très tôt le désir d'apprendre et nourrir l'habileté à apprendre est au cœur de la TID. L'objectif principal de l'éducation primaire est de transformer l'intérêt pour l'apprentissage en activité d'apprentissage conscient, ce qui inclut par exemple l'utilisation consciente du raisonnement théorique. Idéalement, à la fin du primaire, les élèves devraient toujours aimer apprendre, et savoir maintenant le faire. L'apprentissage devient leur activité « professionnelle », comme coiffer est une activité de coiffeurs, ou vendre est une activité de marchands. De ce point de vue, la course à vingt n'invite pas dès le début les élèves à se concentrer sur la partie « apprentissage », mais cherche plutôt à les laisser apprivoiser le jeu d'une façon personnelle.

La TSD n'explique pas comment et pourquoi les élèves développeraient leurs habiletés de travail éducatif leur permettant à un moment donné de passer à une mode d'apprentissage adulte (comme au niveau universitaire). La TID par contre n'explique pas la valeur de l'étape de la familiarisation avec du contexte utilisé pour travailler un concept. On peut dire que du côté de la TSD, les règles et le contrat sont les forces didactiques principales qui nourrissent la disposition naturelle de l'élève à jouer ou résoudre. Selon la TID, le jeu n'est que la forme initiale de l'apprentissage qui doit ensuite être développée pour devenir l'activité d'apprentissage consciente. En utilisant la terminologie de Brousseau, nous pourrions dire que Davydov demande que le contrat de jeu soit graduellement remplacé par un contrat d'apprentissage conscient et responsable. La curiosité et le désir de jouer ou de résoudre restent toujours là, mais ils sont dorénavant régulés par l'apprentissage conscient. On peut cependant voir cette différence comme une complémentarité. Dans le cas de la course à vingt, il me semble que l'on peut envisager un usage simultané des deux théories pour décrire et expliquer le passage graduel d'un jeu vers l'apprentissage conscient au sein d'une même activité. La TSD décrit bien les composantes didactiques, notamment les situations d'actions-communication-validation-constitutionnalisation, qui rendent la transformation du contrat didactique possible, et la TID explique la direction globale de l'effort didactique pour que la transformation se réalise.

La structure de la tâche

Le développement de la pensée théorique au sein de la TID est encadré par l'activité d'apprentissage conscient. Pour permettre le développement de cette activité chez les élèves, la TID propose une nouvelle forme de tâche, Учебная задача (*uchebnaia zadacha* ou problème d'apprentissage), que les élèves, accompagnés de l'enseignant, résolvent

généralement dans la salle de classe. Cette tâche peut inclure un problème à résoudre ou une question à laquelle répondre — un noyau de la tâche. Cependant, la vraie tâche que les élèves doivent réaliser est l'analyse théorique du problème et la création d'une nouvelle théorie qui va ensuite permettre la résolution d'un ensemble de problèmes.

Travailler avec un problème d'apprentissage peut d'une certaine manière être similaire à travailler avec une situation fondamentale de la TSD, ce que Brousseau décrit comme :

les problèmes posés par une situation à la mise en œuvre d'un modèle (implicite ou explicite) préexistant, ou par une théorie à la prise d'une décision, provoquant l'évolution, la reprise ou le rejet et la formation des théories. (2004, p. 275)

En fait, Brousseau et Davydov proposent tous les deux de commencer avec un problème et de terminer avec une théorie (partielle). Le cycle d'action-formulation-communication-validation-institutionnalisation de Brousseau a le même objectif que l'appel de Davydov à créer de nouvelles connaissances dans une forme théorique culturellement partagée. Il ne semble donc pas y avoir de différences majeures de ce point de vue. C'est sans doute ce qui nous permet d'utiliser la course à vingt comme exemple ici. Dans la course à vingt, on trouve ce que les deux théories préconisent : une tâche-noyau (le jeu) et une partie conçue pour théoriser et généraliser les conceptions des élèves. Mais voyons ce qu'on imagine que l'enseignant peut faire avec la tâche en salle de classe.

Le rôle de l'enseignant

La TID relève comme problème principal, pour la majorité des enseignants de mathématiques dans les écoles russes, la tendance à susciter la pensée empirique chez les élèves au détriment du développement de leur pensée théorique. Davydov explique que les concepts mathématiques qu'ils essaient d'enseigner manquent de fondements. Par exemple, l'origine de la multiplication/division doit être trouvée dans le changement de l'unité de mesure d'une quantité, alors que la soustraction répétée est l'une des multiples méthodes de calcul pour l'opération de division. L'enseignement basé sur l'addition (ou la soustraction) répétée crée un écart logique entre le concept de multiplication/division et son origine dans la culture mathématique (la compréhension qu'en ont les mathématiciens), ce qui empêcherait une compréhension complète et profonde chez les apprenants [5]. Selon Davydov :

The main point, however, does not have to do with any particular deficiencies [of instruction]—but with the fact that in school teaching the divide between mathematical concepts and their origin leads to a complete lack of logic and order in the mathematics curriculum. (2008, p. 81)

Pour Davydov les enseignants et les élèves sont donc victimes d'un curriculum mal conçu. Et une fois établi un curriculum convenable pour le développement du raisonnement théorique, l'enseignant doit prendre le rôle crucial de gardien de l'authenticité mathématique de l'activité en classe. Davydov donc ne voit pas de problème dans la pédagogie, mais dans le curriculum.

Au contraire, Brousseau attribue la difficulté de comprendre chez les élèves principalement à la pédagogie qu'emploient les enseignants (à ce moment, en France). Brousseau écrit :

Dans les situations de recherche, la pédagogie classique conduit le maître à « exploiter » immédiatement ou presque la « bonne » déclaration. Il parle avec le premier ou un des premiers « qui trouvent ». Finalement, les échanges concernent 20% des enfants (les plus « vifs »). (2004, p. 269)

Selon Brousseau, la pédagogie ne soutient pas la participation active et l'investissement cognitif des élèves pendant les discussions en classe, compromettant donc la construction de leurs connaissances. La TSD met de l'avant plusieurs concepts théoriques pour expliquer ce qui se passe en salle de classe et pour permettre à l'enseignant mieux gérer l'apprentissage des élèves.

L'un des concepts de bases de la TSD est le *contrat didactique* qu'on peut comparer aux règles d'un jeu. Certaines règles sont communiquées aux joueurs de manière explicite alors que d'autres sont implicites. Chaque participant dans une situation didactique développe sa propre compréhension du contrat didactique en utilisant les règles explicites et en reconstruisant celles qui sont implicites. Pour Brousseau, un contrat didactique est ce qui affecte le plus le processus de développement du savoir : « C'est à mon avis l'existence du contrat didactique qui assure le fonctionnement du processus, et non une quelconque loi de la genèse de la connaissance » (2004, p. 193). Donc la réussite de l'apprentissage dans la course à vingt dépend des règles dites et non dites que l'enseignant établit en classe et pas seulement de la conception des situations composant l'activité.

Dans le cadre de la TSD, le *milieu* appuie et modifie le rôle dit traditionnel de l'enseignant (par exemple, enseigner explicitement) dans le processus d'apprentissage. Selon Brousseau, le milieu peut être un environnement physique (un ordinateur, par exemple) ou logique (comme un jeu) qui réagit aux actions des élèves. Le milieu aide l'enseignant à engager les élèves dans l'apprentissage autonome, ce que Brousseau appelle la dévolution : « Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation » (p. 60). La course à vingt invite l'élève à appliquer une stratégie, et le milieu — le règlement du jeu accompagné des stratégies des autres joueurs — détermine si l'élève gagne ou perd. L'enseignant et le milieu se complètent tout au long de la séquence (dévolution-formulation-validation-institutionnalisation) afin de faire émerger le savoir.

On voit donc que dans la TSD, le rôle de l'enseignant est de permettre aux élèves de s'engager dans la découverte autonome et dans la construction de connaissances à partir de la première interaction avec un milieu (situation d'action). Et Brousseau interdit même explicitement à l'enseignant d'influencer le jugement des élèves lors de leurs premières interactions avec le milieu. L'interaction avec l'enseignant s'effectue dans les situations de communication et de validation, et surtout dans la situation d'institutionnalisation où l'enseignant joue le rôle d'expert

en fournissant des formes d'expression de connaissances acquises qui sont approuvées culturellement.

En ce qui concerne la TID, on trouve peu de détails sur le rôle de l'enseignant (dans les textes consultés, en tout cas). On peut cependant comprendre que le rôle de l'enseignant est d'accompagner les élèves dans la résolution d'un problème d'apprentissage soigneusement sélectionné, et de suggérer au besoin un instrument développé culturellement pour permettre aux élèves de progresser dans leur quête théorique sur le problème (voir par exemple Davydov & Kerr, 1995). Ma lecture de Davydov suggère que, dès le début d'une activité d'apprentissage, l'enseignant invite explicitement les élèves à analyser et modéliser le problème pour en déduire de nouvelles connaissances en faisant appel à leur pensée théorique. En fait, l'enseignant est le gardien de la culture mathématique au sein de l'activité mathématique qu'entreprennent les élèves. Ces connaissances sont donc communiquées immédiatement sous une forme approuvée culturellement.

Puisque le rôle de l'enseignant diffère selon les deux théoriciens, l'orientation des élèves pendant le processus d'apprentissage est distincte elle aussi. Bien que Davydov et Brousseau visent l'investissement cognitif des élèves pendant le processus d'apprentissage, pour Davydov l'orientation initiale va vers la pensée théorique et la quête d'une relation générale est capitale à l'apprentissage efficace et efficient. Pour Brousseau, c'est d'abord la quête libre de l'élève dans le milieu, suivi par négociation entre les pairs qui assure cette efficacité. On observe ici un vrai point de divergence, car la découverte personnelle n'est pas un concept valorisé dans la TID, qui préconise par contre une formation de savoir chez l'élève grâce au raisonnement théorique et à l'emploi des outils disponibles dans la culture mathématique. Il pourrait être intéressant d'explorer plus à fond ce point de divergence.

Conclusion

J'ai analysé ici quelques concepts des deux théories dans le but de trouver des points d'intersection et de divergence. Ma lecture des deux auteurs me donne l'impression que leurs affirmations sont souvent formellement opposées. Néanmoins, je crois avoir réussi à coordonner les deux lectures de manière sensée, et à trouver des liens importants.

Dans les deux théories, l'apprentissage commence par une activité concrète pour en dégager un savoir cohérent avec la culture mathématique. La forme de l'activité spécialement conçue joue un rôle majeur dans l'apprentissage ainsi que les interventions de l'enseignant (ou leur absence). Par contre, les deux auteurs approchent souvent ces points communs par les perspectives différentes : une du point de vue de l'ingénierie didactique et l'autre du point de vue du développement de l'enfant. TSD parle plus des composantes didactiques concrètes à employer dans l'activité d'apprentissage et la TID indique plutôt la direction globale à entreprendre au cours de l'activité et dans le curriculum. Ceci évoque pour moi une complémentarité des deux théories.

Un point de divergence important est cependant identifié par rapport au niveau de « liberté » de l'élève dans sa quête personnelle au sein d'une activité d'apprentissage. La TID se positionne comme une théorie du développement de

l'enfant dans l'apprentissage scolaire, incluant l'apprentissage des mathématiques. Elle cherche à expliquer les principes de transformation d'un élève en un apprenant conscient. Elle ne cherche donc pas à décrire les paramètres précis d'activités d'apprentissage pouvant aller jusqu'à rendre inévitable certaines formes de pensée, mais plutôt à assurer que les notions plus générales sont acquises avant les connaissances concrètes multiples qui en dérivent. L'aspect « ingénierie » est donc moins présent dans la TID que dans la TSD. La TSD, elle valorise la quête libre de l'élève dans le milieu. Cette divergence (et surtout les formulations qu'on retrouve dans les livres) serait-elle l'effet de cultures scientifiques différentes? Est-ce suffisant pour mettre en question leur possible complémentarité? Pour moi, il semblerait que non, mais l'adaptation de ces théories en classe pourrait peut-être nous en apprendre davantage. Qu'en pensez-vous?

Remerciements

Je suis très reconnaissante à Helena Boubil-Ekimova et Anna Sierpiska qui m'ont donné leur soutien sur ce chemin difficile, mais intéressant.

Notes

[1] Le nom Théorie de l'Instruction Développementale est choisi par Vassili Davydov, je le traduis en accord avec son dernier livre : Davydov, V. V. (1996). *Теория развивающего обучения*. Moscow: INTOR. Formellement, la TID est née dans le champ de psychologie, car traditionnellement en Russie le champ « didactique des mathématiques » n'existait pas. Toutefois, Davydov et ses collègues se préoccupaient des questions didactiques. Ceci leur a permis, en plus de la création d'une théorie, de concevoir un cur-

riculum original de mathématiques pour le primaire, et des dispositifs didactiques fort intéressants.

[2] À part de la théorie historico-culturelle du développement des fonctions mentales supérieures de L. S. Vygotsky, on peut nommer la théorie de l'activité de A. N. Léontiev, la théorie de la formation d'action par étapes de P. Galpérin, la périodisation du développement mental de l'enfant de D. B. El'konin, et plusieurs autres.

[3] Je mets en évidence les termes *que* je vais discuter plus bas dans le texte.

[4] Il est difficile de faire une distinction claire entre *notion* et *concept* par leur utilisation dans les textes.

[5] Pour une discussion intéressante à ce sujet voire l'article de Maffia et Mariotti dans FLM 38(3).

Références

- Brousseau, G. (2004) *Théorie des Situations Didactiques* (2ième ed.). Grenoble: La Pensée sauvage.
- Davydov, V.V. (2008) *Problems of Developmental Instruction: A Theoretical and Experimental Psychological Study*. Hauppauge, NY: Nova Science Publishers.
- Davydov, V.V. & Kerr, S.T. (1995) The influence of L.S. Vygotsky on education theory, research, and practice. *Educational Researcher* 24(3), 12-21.
- Piaget, J. (1978) Introduction. In Piaget, J. & Henriques, G. (Eds.) *Recherche sur la Généralisation*, pp. 5-8. Paris: Presses Universitaires de France.
- Radford, L. (2008) Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM* 40(2), 317-327. doi:10.1007/s11858-008-0090-3
- Schmittau, J. (2011) The role of theoretical analysis in developing algebraic thinking: a Vygotskian Perspective. In Cai, J. & Knuth, E. (Eds.) *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*, pp. 71-85. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_5

