A Textbook Chapter from an Idea of Pascal *

ROLAND STOWASSER

* First published in German in *Mathematiklehrer* 2-1981

1. Contents and prospects

A study of Pascal's paper "De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis" (given here in French in the appendix) will enable the reader to judge Pascal's part in my proposal for a lesson which I constructed and have repeatedly practised with 11-year-olds (and enthusiasts of mathematical thinking)

To start the experiment we take the very familiar clock and ask an absurd question. Pascal's idea comes to light in a very simple way – on the face of the clock, so to speak.

By non-Babylonian divisions of the day, games with matches, etc., variations of Pascal's idea are played. This idea can be more useful in general as simply organizing perfectly the item of the curriculum "divisibility rules". The interaction of Pascal's idea and the idea of "Restgleichheit" (equality, identity of remainders) is at the heart of my proposal. Pascal, on the other hand, moves his beautiful idea only within the scope of the divisibility rules, he only sees the particular case (remainder 0), he makes insight more difficult, is forced to prove, and shows that he has not fully understood his own idea

My proposal uses Pascal's idea to develop quick algorithms which produce smaller numbers with the same remainder as given numbers. Pascal's divisibility rule is a by-product, as are the trivial special cases, the digital sum and alternating sum rules found in the textbooks.

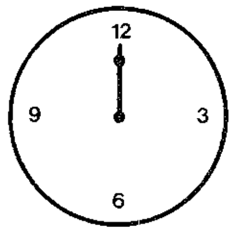
It is not difficult to write a textbook chapter following this proposal. The suitable textbook, however, is not in sight, although its characteristics are sufficiently known: It develops mathematics around organizing ideas the power of Pascal's. The connections are not presented in the usual plain logical systematical way. It dissociates itself from the questionable practice of administering only spoonfuls of the subject (Freudenthal) It offers plenty of rich concrete situations which support active learning. Or, more consequentially, it aims at making passive learning impossible (Freudenthal again)

How raids on the history of mathematics can contribute to concrete mathematics teaching is demonstrated in this paper

2. The hour hand

Place value systems have previously been treated thoroughly, and let's hope the pupils have abundant experience with the abacus. So a chapter on "divisibility" for 11-year-olds is a natural continuation of counting by groups

In the 11-year-olds' daily life experience the clock is just the right thing to start with. I have a big cardboard clock without a minute hand. The hour hand is on the 12



A pupil is called to the blackboard He is told to write down the number of hours the hour hand should move. He writes down an unpronounceable number of hours which goes from left to right across the blackboard Three seconds after the last written figure I put the hour hand on the right hour For example, the pupil writes

$$2045010223053123456789024681357902541403.$$

I put the hour hand on the 7 The pupils check by dividing through by 12 One page is filled Plenty of mistakes. In the right hand corner is written the only interesting thing: the remainder

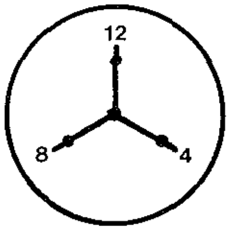
The pupils know that I am not a magician, especially that I am not good at mental arithmetic. Of course I do not reveal the trick. The pupils will work for it, discover it A prepared work sheet asking "what time is it", that means asking for the remainders regarding 12, shows a pattern: the remainders of 12 (Zwölferreste) divided into the powers of 10 (Zehnerpotenzen) from 10^2 on, are all equal, thank God.

$$R_{12}(10^n) \text{ is constant for } n \geqslant 2.$$

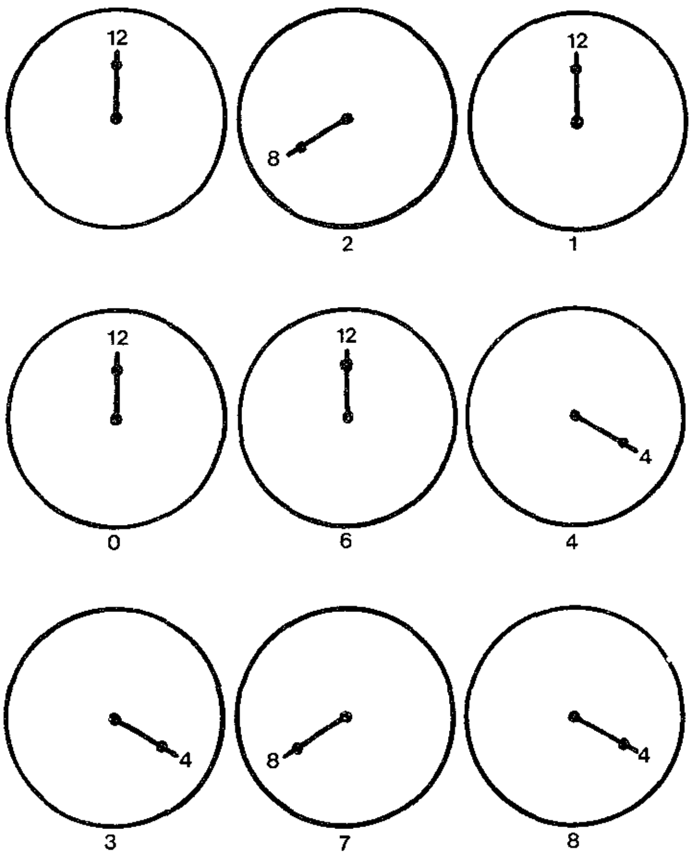
Every 10th power pushes the hour hand 4 hours ahead

I assume, otherwise it has to be dealt with, the pupils really know what the abacus is, that they can see a decimal number consisting of powers of 10.

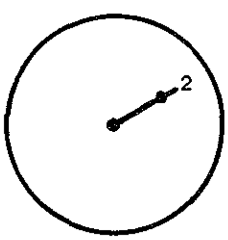
Now my mystery trick in arithmetic is solved. No matter how many digits there are in front, the hour hand simply jumps to and fro among three positions (beyond the tens)



I prefer to do the rotation of the hand mentally instead of on the actual clock. In the example R_{12} (2106437822) my mental arithmetic looks like this:



The 22 hours at the end, being out of the routine, put the hour hand in the final position:



The 11-year-olds even understand my enquiry whether the calculations on the working sheet confirm that $R(10000000000) = 4$. The reason why – hidden reasoning by induction because of the recursively defined powers of 10 – can be found by 11-year-olds with a little help.

4 hours remain from 10^2 hours after taking away the half days. From $10^3 = 10 \cdot 10^2$ hours remain $10 \cdot 4$ hours. From 10^3 hours remain therefore again 4 hours after taking away the half days. We proceed in the same way for $10^4 = 10 \cdot 10^3$ ....

The "Clock counting" can be shown in a more complicated way, e.g. by operating with symbols instead of pictures. Pascal's simple idea can be made difficult to understand, as in:

$$\begin{aligned} & R_{12}\,(2106437822) \\ &= R_{12}\,((2+1+0+6+4+3+7+8)\cdot 4+22) \\ &= R_{12}\,(31\cdot 4+22) \\ &= R_{12}\,(146) \end{aligned}$$

The recipe in the language of 11-year-olds:
(1) take away the 2-digit end of the number:
21064378/22
(2) take 4 times the added digits of the first part:
$4\cdot(2+1+0+6+4+3+7+8) = 124$
(3) add the result of (2) and the 2-digit end:
$124 + 22 = 146$
The original number and the result of (3) have the same remainder:

$$R_{12}\,(2106437822) = R_{12}(146)$$

A mathematician writes the result in his artificial language in the following way:

$$R_{12}\left(\sum_{k=0}^{n} Z_k \cdot 10^k\right) = R_{12}\left(4 \cdot \sum_{k=2}^{n} Z_k + Z_1 \cdot 10 + Z_0\right)$$

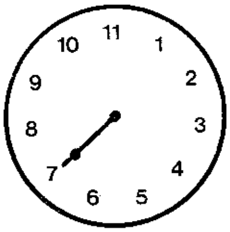
In any case: the first problem has been solved. The pupils have found out about my fast counting method (trick), with which I surprised them initially. Now they let themselves be admired as mathematical marvels by their astonished parents and friends. Then there is also the pleasure of informing them.

3. The minute hand

After 60 minutes the minute hand starts all over again. The pupils master the altered situation independently. They have already looked at Pascal's idea for a general solution in the special case 2 (that's exactly why I have chosen this part of the number theory as a show-piece for problem-orientated teaching). The result:

$$R_{60}\left(\sum_{k=0}^{n} Z_k \cdot 10^k\right) = R_{60}\left(40 \cdot \sum_{k=2}^{n} Z_k + Z_1 \cdot 10 + Z_0\right)$$

4. The 11-hour-clock



We write the remainders on division by 11 of powers of 10 from right to left on a remainder strip. With it we can make a small number having the same remainder relative to 11 as any given large number. Under the cut-out remainder strip we write the number (let's say 620518), each digit in the right place:

(11)	10	1	10	1	10	1
	6	2	0	5	1	8

Every digit of the number is multiplied by the remainder of the power of 10 (relative to 11) above it. The products are added

$$6 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 1 = 85$$

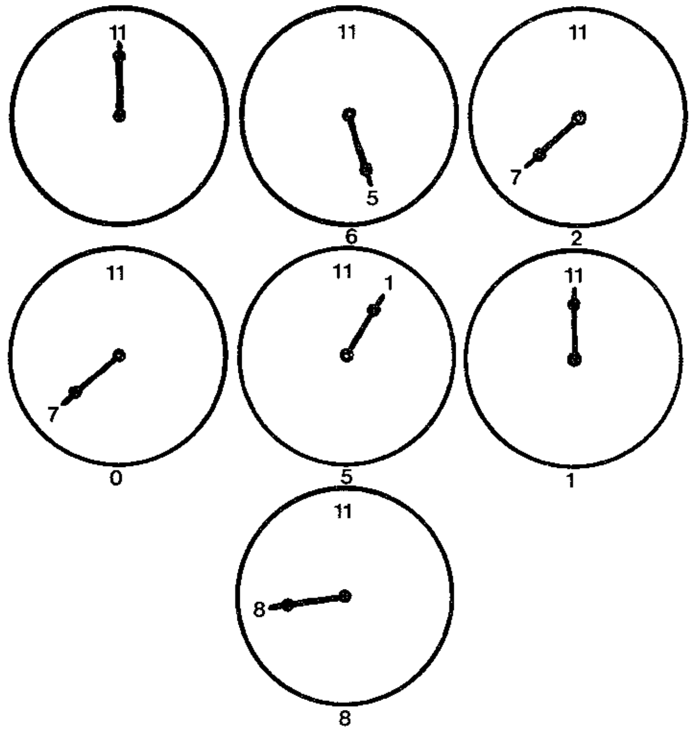
The number obtained is called the weighted sum of the digits (relative to 11): $Q_{11}(\ )$

The general method for making a number with the same remainder – regrouping every power of 10 on its own – as seen in the particular case – proves the above-mentioned remainder strip method.

By using negative numbers, certain remainder strips are improved. One takes the smallest number as a representative of the remainder class, e.g.

(11)	−1	1	−1	1

The pupils more easily understand the language of the 11-hour clock: instead of moving 10 hours ahead, go back one hour.



5. A match game

Tired of clocks, we now go on to playing with matches. A pupil puts a number of matches in a normal matchbox. I shake the matchbox and listen to it, then a number equal to the sum of the digits is taken out by the pupil. I shake it again and I am able to tell the exact number of matches left in the matchbox. The pupils try it themselves and learn: after taking away the sum of the digits the remaining number of matches is always a multiple of 9. A trained ear can easily detect the few possibilities.

The question of the validity of the theorem: 9 divides $z - Q(z)$ remains. (The pupils formulate this theorem of number theory after having experimented with "big" numbers without the matchbox.) Let's take the matches out of the matchbox and bundle them in tens: this results in a few bundles of tens (5 at most), some single matches (9 at most). Take away the sum of the digits like this: 1 from every bundle of 10 and also every single match. There remain certainly some bundles of 9 or else all the matches have been taken away. For larger numbers we have another look at the remainders relative to 9 of the powers of 10. The remainder strip tells the rest:

(9)	1	1	1

With this, another number having the same remainder relative to 9 can be made out of any number – that is, the weighted sum of the digits. The remainder strip shows the identity of both number theoretic functions Q_9 and Q (the normal sum of the digits). This makes the use of the 9-hour clock as easy as child's play.

6. Further remainder strips

The pupils have by now grasped: to every number b belongs a remainder strip on which the remainders of the powers of 10 are written. With it the weighted sum of the digits of a number z can be computed. $Q_b(z)$ has the same remainder as z (relative to b).

The pupils are given free choice. They find beautiful and complicated remainder strips. Periods regularly occur, the length of the period is always smaller than b. The reasons for this are easily understood (there are only $b-1$ different remainders). Beautiful remainder strips have short periods.

12	4	4	4	4	10	1

60	40	40	40	40	10	1

3	1	1	1	1

The remainder strips for 9 and 3 are identical. Therefore the remainder strip does not explicitly define the bundle number b. Not every sequence of natural numbers beginning with 1 and becoming periodic represents a remainder strip (why?).

The well-known number 37 has a beautiful remainder strip

37	26	10	1	26	10	1

For bundle numbers b which are divisors of a power of 10, the remainder of this power of 10 and of all the following powers of 10 is 0. When the part at the beginning is not too long, computing the weighted sum of the digits is very easy. Later on, the theorem of decomposition into prime factors will guarantee that these are bundle numbers of the form $2^m \bullet 5^n$.

16	0	0	8	4	10	1

40	0	0	20	10	1

Less beautiful is the remainder strip for the number 7. It has a 6-digit, thus maximal, period.

7. Pascal's divisibility rule

We recall: z and $Q_b(z)$ have the same remainder relative to b. Therefore both numbers (relative to b) either have the remainder 0 or both have a remainder different from 0 (relative to b). Or to put it differently: if and only if b divides z, b divides the weighted sum of the digits of z relative to b. This is the content of Pascal's divisibility rule.

My 11-year-olds show they have fully understood this when they are able to use the remainder strip correctly and have understood the basic method of regrouping. In textbooks one can find some rules for the end digits (remainder strips with zeros) and for the sums of the digits for division by 3, 9 and 11. They are all particular descendants of Pascal's divisibility rule.

8. Remainder strips and divisibility rules for other place value systems

Clever pupils quickly see there is no reason to prefer the decimal system. Pascal's method can also be used in other position systems (Pascal refers to this explicitly in his paper). The clever pupils will find divisibility rules for non-decimal place value systems and will discover strong analogies. They will see that the rule of divisibility for 4 in base 5 is the same as the rule of 9 in base of 10.

9. Sawn-up algorithms

A teacher will easily recognize the character of these strange yet obvious applications from the following brief comments. Given a large number I would like to make a much smaller number having the same remainder, e.g. on division by 37.

Because of $R_{37}(10^6) = 1$, I saw off a 6-digit part from the right hand end of the given number and add it to the left hand part.

$$\begin{array}{rr} a = & 403342028376\ \boxed{253102} \\ + & 253102 \\ \hline a_{37} = & 403342281478 \end{array}$$

There is a lot of sawing to do with large numbers.
With prime numbers p (except 2 and 5) the "little Fermat theorem" guarantees that

$$R_p(10^{p-1}) = 1$$

The number 14 does not yield the remainder 1 from any power of 10.

But because $R_{14}(10^8) = 2$ we can add the doubled front part to the sawn-off 8-digit end part.

$$\begin{array}{rr} a = & \boxed{234820123502}\ 42640218 \\ \cdot 2 \rightarrow & 469640247004 \\ \hline a_{14} = & 469682887222 \end{array}$$

Appendix

The following extracts are taken from *Oeuvres de Blaise Pascal* Volume III, edited by Léon Brunschvigg and Pierre Boutroux.

DES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ DES NOMBRES DÉDUITS DE LA SOMME DE LEURS CHIFFRES

Remarque préliminaire

Rien de plus connu en arithmétique que la proposition d'après laquelle un multiple quelconque de 9 se compose de chiffres dont la somme est elle-même un multiple de 9. Si, par exemple, on additionne les chiffres dont se compose 18, double de 9, on trouve $1 + 8 = 9$. De même, en additionnant les chiffres d'un nombre quelconque, on reconnaîtra si ce nombre est divisible par 9. Ainsi 1719 est un multiple de 9, parce que la somme $1 + 7 + 1 + 9$ ou 18 de tous ses chiffres est elle-même divisible par 9. Bien que cette règle soit communément employée, je ne crois pas que personne jusqu'à présent en ait donné une démonstration ni ait cherché à en généraliser le principe. Dans ce petit traité, je justifierai le caractère de divisibilité par 9 et plusieurs autres analogues; j'exposerai aussi une méthode générale qui permet de reconnaître, à la simple inspection de la somme de ses chiffres, si un nombre donné est divisible par un autre nombre quelconque; cette méthode s'applique non seulement à notre système décimal de numération (système qui repose non sur une nécessité naturelle, comme le pense le vulgaire, mais sur une convention, d'ailleurs assez malheureuse) mais encore à tout système de numération ayant pour base tel nombre qu'on voudra.

Proposition unique

Reconnaître, à la seule inspection de la somme de ses chiffres, si un nombre donné est divisible par un autre nombre donné.

Pour plus de généralité nous remplacerons les nombres par des lettres. Soit donc un diviseur quelconque que nous représenterons par la lettre A, et soit un dividende TVNM dans lequel les lettres M, N, T, V représentent respectivement les chiffres des unités simples, des dizaines, des centaines, des unités de mille, et ainsi de suite: de telle sorte que, pour passer des quantités littérales aux quantités numériques, il suffirait de remplacer chacune des lettres par l'un des 9 premiers nombres, par exemple M par 4, N par 3, V par 5, T par 6, ce qui donnerait pour dividende 6534, le diviseur A étant un nombre quelconque tel que 7. Mais nous laisserons de côté les exemples particuliers afin de comprendre tous les cas possibles dans une même solution générale. Étant donc donné le dividende TVNM et un diviseur quelconque A, il s'agit de reconnaître, à la seule inspection de la somme de ses chiffres, si ce dividende est exactement divisible par A.

Écrivons sur une même ligne, et dans l'ordre décroissant, les nombres de la suite naturelle, puis au-dessous, une autre suite de nombres, de manière à former le tableau;

. . .	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
.	K	I	H	G	F	E	D	C	B	I

Dans ce tableau, les nombres de la seconde ligne sont formés comme il suit:

Au-dessous de l'unité on place l'unité.

De celle-ci prise *dix fois,* c'est-à-dire du nombre 10, on retranche le diviseur A autant de fois que possible, et l'on écrit le reste B sous le nombre 2.

De B pris *dix fois* on retranche de même le diviseur A autant de fois que possible, et l'on écrit le reste C sous le nombre 3.

De 10 C on retranche encore le diviseur A autant de fois que possible, et l'on écrit le nouveau reste D sous le nombre 4.

Et ainsi de suite.

Je dis que, pour le nombre TVNM soit divisible par A, il faut et il suffit que la somme $M + N \times B + V \times C + T \times D$, etc., soit elle-même divisible par A.

Il est évident que si le nombre proposé n'a qu'un seul chiffre, M, M est divisible par A, car le nombre tout entier se réduit à M.

Soit maintenant un nombre de deux chiffres, représenté par NM; je dis que pour qu'il soit divisible par A il faut et il suffit que la somme $M + N \times B$ le soit.

En effet, le chiffre N, placé dans la colonne des dizaines, équivaut à 10N; or:

D'après le calcul $10 - B$ est un multiple de A;

Multipliant par N, $10N - B \times N$ sera aussi un multiple de A;

Si donc il arrive que $M + B \times N$ soit un multiple de A;

La somme de ces deux dernières quantités, savoir: $10N + M$ sera elle-même un multiple de A.

Donc $10N + M$, c'est-à-dire le nombre proposé NM est un multiple de A.

C. Q. F. D.

Soit encore un nombre de trois chiffres VNM; pour qu'il soit divisible par A, je dis qu'il faut et suffit que la somme $M + N \times B + V \times C$ soit elle-même divisible par A.

En effet, le chiffre V, placé dans la colonne des centaines, équivaut à 100 V; or

D'après le calcul . . . . $10 - B$ est un multiple de A;

Multipliant par 10 . . , $100 - 10B$ sera aussi un multiple de A;

Multipliant encore V, $100V - 10B \times V$ sera multiple de A;

Mais d'après le calcul. $10B - C$ est un multiple de A;

Multipliant par V, $10B \times V - C \times V$ sera multiple de A;

Et comme on vient d'établir que $100V - 10B \times V$ est un multiple de A, la somme de ces deux dernières quantités, savoir: $100V - C \times V$ sera elle-même un multiple de A;

Mais nous montrerons comme dans le second cas que $10N - B \times N$ est un multiple de A;

Donc la somme des deux dernières quantités, savoir: $100V + 10N - C \times V - B \times N$ sera un multiple de A;

Si donc il arrive que $C \times V + N \times B + M$ soit un multiple de A; la somme des deux dernières quantités écrites, savoir: $100V + 10N + M$, sera encore un multiple de A; mais $100V + 10N + M$, c'est le nombre proposé VNM; donc ce nombre est un multiple de A.

C. Q. F. D.

La démonstration serait la même si le nombre donné se composait de plus de trois chiffres.

Exemples:

Soit à chercher quels sont les multiples du nombre 7. J'écris la suite des dix premiers nombres, et je forme le tableau

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

en procédant comme il suit:

J'écris l'unité sous l'unité.

De l'unité, prise 10 fois, je retranche 7 autant de fois que possible, et je place le reste 3 sous le chiffre 2.

Je multiplie le reste 3 par 10 et du produit 30 je retranche 7 autant de fois que possible; je place le nouveau reste 2 sous le chiffre 3.

De 20 je retranche 7 autant de fois que possible et j'écris le reste 6 sous 4.

Les restes déjà obtenus, savoir: 1, 3, 2, 6, 4, 5, se retrouvent donc dans le même ordre, et ainsi indéfiniment.

Soit alors à reconnaître si un nombre quelconque 287542178 est un multiple de 7:

Je prends le premier chiffre du nombre à partir de la droite, et je le multiplie par l'unité (qui dans notre tableau est placée sous le nombre 1). J'écris donc:

le produit de 8 par l'unité, c'est-à-dire.	8
J'écris ensuite le produit de 7 par le chiffre 3 placé sous 2 dans notre tableau, soit	21
puis le produit de 1 par 2	2
le produit de 2 par 6	12
le produit de 4 par 4	16
le produit de 5 par 5	25
le produit de 7 par 1	7
le produit de 8 par 3	24
le produit de 2 par 2	4
et je fais la somme	119

Si 119 est divisible par 7, le nombre proposé 287542178 le sera aussi.

La même méthode peut encore servir à reconnaître si 119 est un multiple de 7.

On multipliera 9 par l'unité, ce qui donne	9
Puis 1 par 3	3
Et enfin 1 par 2	2
Et l'on fera la somme	14

Si cette somme est divisible par 7, 119 le sera également.

Enfin, et par curiosité plutôt que par nécessité, on pourra traiter encore le nombre 14 comme on a traité 119, c'est-à-dire:

Multiplier 4 par l'unité, ce qui donne	4
Puis 1 par 3	3
Et faire la somme	7

Celle-ci étant évidemment divisible par 7, le nombre 14 le sera aussi; partant 119 le sera, et par suite, enfin, le nombre proposé 287542178 sera lui-même un multiple de 7.

Il serait facile d'étendre encore ces exemples: mais je me contenterai d'avoir ouvert la route et éclairé par une démonstration précise ce sujet nouveau et assez obscur. Les caractères de divisibilité des nombres déduits de la somme de leurs chiffres reposent à la fois sur la nature intime des nombres et sur leur représentation dans le système de numération décimale. Dans tout autre système, par exemple dans le système duodécimal (système fort commode sans doute) qui, outre les neuf premiers chiffres, emploie deux figures nouvelles pour désigner, l'une le nombre 10, l'autre nombre 11, dans ce mode de numération, il ne serait plus vrai que tout nombre dont la somme des chiffres est un multiple de 9 est lui-même divisible par 9.

Mais la méthode que j'ai fait connaître et la démonstration que j'en ai donnée, conviennent encore à ce système ainsi qu'à tout autre.

Veut-on, dans le système duodécimal, reconnaître si un nombre est divisible par 9, on écrit, comme on l'a fait plus haut, la suite des nombres naturels, puis on forme le tableau

4	3	2	1
0	0	3	1

en procédant comme il suit: sous l'unité on place l'unité; de l'unité prise 12 fois, c'est-à-dire de 10 (qui maintenant veut dire: *douze*, et non plus *dix*) on retranche 9 et l'on écrit le reste 3 sous le nombre 2; du produit 30 (lisez *trente-six* ou *trois fois douze*) on retranche encore 9 autant de fois que possible, ce qui donne pour reste zéro, car trente-six contient quatre fois exactement le nombre 9. Les restes suivants seront nuls. Il viendra donc 0 sous tous les chiffres restants.

D'où l'on conclut que tous les nombres, écrits dans le système duodécimal, pour lesquels la somme du premier chiffre de droite et du triple du second (il n'est pas besoin de s'occuper des autres puisqu'ils donnent 0) sera divisible par 9, seront eux-mêmes des multiples de 9.

On reconnaîtra aussi que, dans le même système de numération, tous les nombres dont la somme des chiffres est divisible par 11, sont eux-mêmes des multiples de 11.

Dans notre système décimal au contraire, pour qu'un nombre fût divisible par 11, il faudrait que la somme formée par le dernier chiffre, puis le décuple de l'avant-dernier, puis le chiffre précédent, puis le décuple du précédent, etc., donnât un multiple de 11.

Il serait facile de justifier ces deux règles et d'en obtenir d'autres. Mais si j'ai touché ce sujet c'est parce que je cédais volontiers à l'attrait de la nouveauté; maintenant je m'arrête de peur de fatiguer le lecteur en entrant dans trop de détails.