RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS : LA TRANSITION DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE

EUGENIO FILLOY, TERESA ROJANO

De récentes recherches ont mis en évidence certains changements conceptuels et/ou symboliques marquant une différence entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique. Certains de ces changements concernent différentes interprétations des lettres (Booth, 1984), la notion d'égalité (Kieran, 1980, 1981) et les conventions graphiques ou symboliques pour coder les opérations et les transformations lors de la résolution d'équations (Matz, 1982). Ces observations permettent de supposer certaines lignes directrices dans l'évolution du langage arithmétique vers le langage algébrique qui correspondent aux notions et aux formes de représentation des objets et des opérations impliqués dans ce passage. Les changements que l'apprenant doit effectuer pour accéder au langage algébrique peuvent alors être vus comme des points de rupture dans cette évolution, ruptures séparant ces deux types de pensée.

L'une de ces ruptures est particulièrement intéressante relativement au thème de la résolution de problèmes : elle ressort de l'analyse des stratégies et des méthodes de résolution des systèmes d'équations trouvées dans les manuels d'algèbre présymbolique des 13ème, 14ème et 15ème siècle (Boncompagni, 1954 ; Calandri, 1974 ; della Francesca, 1970 ; Hughes, 1981 ; De' Mazzinghi, 1967). Par exemple, il est possible d'observer que les stratégies de résolution pour des équations comme $x^2 + c = 2bx$ et $x^2 = 2bx + c$ sont complètement différentes (Hughes, 1981 ; Filloy et Rojano, 1984). Si les auteurs avaient employé la règle de transposition des termes d'un côté à l'autre de l'équation, ces différences n'existeraient pas car les deux équations seraient semblables au niveau syntaxique. Toutefois, cette transposition impliquerait déjà une capacité avancée à opérer avec les inconnues des équations.

L'insuffisance opératoire constatée au stade présymbolique de l'algèbre suggère la présence d'une rupture, c'est-à-dire d'une coupure dans le développement relativement aux opérations sur l'inconnue au niveau de la pensée individuelle. Dans le cadre de notre étude clinique « Opérer sur l'inconnue » [1] réalisée auprès d'enfants de 12–13 ans faisant partie de note étude plus générale « L'acquisition du langage algébrique » [2], nous montrons que l'opération sur l'inconnue apparaît comme une action nécessaire à la résolution de certaines équations du premier degré contenant au moins deux occurrences de l'inconnue. Pour résoudre ces équations, il n'est pas suffisant d'inverser les opérations sur les coefficients. Voici des exemples de telles équations :

$3x + 72 = 56x$; $3x + 20 = x + 164$

Selon notre étude, le passage de la résolution opérationnelle d'équations comme $x + 27 = 58$ ou $4(x + 11) = 52$ à la résolution des équations ci-haut n'est pas immédiat. Pour y arriver, il semble nécessaire de construire, ou d'acquérir, certains éléments relatifs à la syntaxe algébrique. La construction de ces éléments syntaxiques est basée sur des connaissances arithmétiques fonctionnelles, mais toutefois limitées — d'où la rupture.

Considérons le concept d'équation. En termes arithmétiques, le côté gauche de l'équation correspond à une séquence d'opérations effectuées sur des nombres (connus ou inconnus) ; le côté droit représente la conséquence de l'exécution de ces opérations. Il s'agit de la compréhension « arithmétique » de l'égalité. À partir d'une telle compréhension, une équation comme $Ax + B = C$ peut être résolue en défaisant simplement une à une les opérations dans la séquence de gauche en commençant par le nombre C. Nous appelons ce type d'équation « arithmétique ».

La compréhension arithmétique ne s'applique pas à une équation de la forme $Ax + B = Cx + D$; sa résolution implique des opérations d'un domaine extérieur à l'arithmétique, c'est-à-dire des opérations sur l'inconnue. Pour que ces opérations deviennent sensées pour l'apprenant, il est nécessaire de donner un sens à une telle équation (que nous appelons « non arithmétique »). Ceci implique un changement dans le concept d'équation ou d'égalité des nombres. En ce qui concerne le « sens » d'une équation non arithmétique, l'apprenant doit au moins comprendre que les expressions de part et d'autre du signe d'égalité sont de même nature (ou structure) et qu'il existe des actions qui donnent un sens à l'égalité des expressions (par exemple, l'action de substituer une valeur numérique à l'inconnue).

Des changements profonds dans les habitudes et les concepts arithmétiques ne se produisent pas spontanément au moment où l'apprenant est confronté à leur nécessité. Les enfants de notre étude, lorsque confrontés pour la première fois à des équations de la forme $Ax + B = Cx$, les ont abordées par essais-erreurs en ne donnant aucune indication d'avoir spontanément tenté d'opérer sur les termes contenant un x (Filloy et Rojano, 1984, 1985). Au moment de cette transition, des interventions appropriées de l'enseignant peuvent être centrales pour les élèves qui apprennent l'algèbre pour la première fois.

D'autre part, bien qu'une certaine modification des notions arithmétiques doive avoir lieu pour que les nouvelles

Traduction autorisée de Filloy, E. et Rojano, T. (1989) Solving equations: the transition from arithmetic to algebra.
For the Learning of Mathematics **9**, 2

notions algébriques puissent être acquises, il est également nécessaire que les connaissances arithmétiques soient préservées. Même dans le cas de l'exemple que nous avons présenté, il est nécessaire que les opérations arithmétiques continuent d'être reconnues comme telles afin que toute l'opérationnalité précédemment acquise dans la résolution d'équations soit préservée. Ce qui est nécessaire, c'est un niveau opérationnel de connaissance qui peut être placé entre le niveau arithmétique et le niveau algébrique, c'est-à-dire un niveau de connaissance pré-algébrique.

La phase de transition

Tel que mentionné plus haut, les conceptions des élèves sur les opérations effectuées sur les nombres doivent changer pour que le concept d'opérations sur des objets autres que les nombres (comme les inconnues) et la conception de ces « nouveaux » objets eux-mêmes (ce qu'ils représentent, ou peuvent représenter) se développent. L'enseignement de l'algèbre doit alors recourir à des moyens didactiques appropriés qui mettent en jeu tous les éléments connexes impliqués dans ce changement.

L'une des deux positions qui s'opposent relativement au type de ressource didactique à utiliser propose de *modéliser* dans un contexte *concret* (c'est-à-dire familier aux élèves) les nouvelles opérations et les nouveaux objets afin de leur donner un sens. En partant de là, les premiers éléments d'une syntaxe algébrique sont construits sur la base du comportement du modèle. La position didactique contraire propose de commencer au niveau syntaxique, d'apprendre les règles syntaxiques appropriées et de les appliquer à la résolution d'équations par la suite. Il s'agit de l'approche didactique traditionnelle basée soit sur le modèle de Viète (transposition des termes d'un côté de l'équation à l'autre), soit sur le modèle d'Euler (opérant sur les deux côtés de l'équation avec des inverses additifs et multiplicatifs).

En adoptant la première position, nous estimons nécessaire d'en connaître plus sur les processus qui interviennent entre les actions effectuées au niveau concret (c'est-à-dire sur le modèle) et les éléments correspondants de la syntaxe algébrique qui sont obtenus à partir d'elles. Ces processus, que nous appelons « abstractions des opérations », présentent certaines caractéristiques standards au cours de leur développement par les individus tout en étant aussi fortement influencés par les différences entre les sujets et en variant selon le modèle.

Pour clarifier certaines des idées avancées, celles-ci seront illustrées en référence à l'étude clinique réalisée.

« Opérer sur l'inconnue »

Notre analyse des textes antérieurs à « L'art analytique » de Viète et notre travail sur le développement des séquences pédagogiques expérimentales ont suggéré l'existence d'une rupture didactique dans l'évolution de la pensée de l'enfant de l'arithmétique à l'algèbre. Cette rupture correspond aux changements majeurs intervenus dans l'histoire de l'algèbre symbolique relativement à la conception de « l'inconnue » et la possibilité « d'opérer sur l'inconnue ».

En termes de curriculum, cette rupture se situe dans la transition entre :

(« Avant ») Les élèves savent résoudre des équations arithmétiques de type

$Ax \pm B = C$

$A(Bx \pm C) = D$

$x/A = B$

$x/A = B/C$

Pour les résoudre, il suffit d'inverser ou de « défaire » les opérations. *Il n'est pas nécessaire d'opérer sur ou avec l'inconnue.*

(« Après ») Les élèves n'ont reçu aucune instruction sur la manière de résoudre les équations de type

$Ax \pm B = Cx$

$Ax \pm B = Cx \pm D$

Pour les résoudre, il ne suffit pas d'inverser les opérations. *Il est nécessaire d'opérer sur ce qui est représenté.*

La population impliquée dans notre étude est composée de trois sessions consécutives en deuxième année d'une école secondaire expérimentale de la ville de Mexico. Tous les élèves ont passé un test écrit de « pré-algèbre » comportant trois types de questions : des équations arithmétiques avec des lettres (par exemple $5x + 3 = 90$), des équations arithmétiques sans lettres (par exemple $\square - 95 = 23$) et des problèmes de mots conduisant à des équations arithmétiques simples. Les enfants dont les résultats aux trois parties du test étaient comparables, se situant soit dans le tiers inférieur, soit dans le tiers moyen, soit dans le tiers supérieur des résultats possibles, ont été sélectionnés pour une entrevue et les entrevues ont été captées sur vidéo.

Durant les entrevues, les élèves ont travaillé sur des séquences de cinq items ou plus, ressemblant aux exemples suivants.

Séquence E. (vérification du pré-test)
p. ex. $x + 5 = 8$; $13x = 39$; $(x + 3)\ 6 = 48$

Séquence C. (l'équation comme équivalence)
p. ex. $x + 5 = 5 + 2$; $x + x/4 = 6 + x/4$; $x + 5 = x + x$

Séquence I. (opérer sur l'inconnue)

p. ex. $3 + 2x = 5x$; $7x + 2 = 3x + 6$; $10x - 18 = 4x$
Séquence A. (problème en mots de type « trouver un nombre »)

L'analyse des entrevues, ayant confirmé la présence d'une rupture didactique (surtout dans le travail des élèves de la strate supérieure), est décrite en détail dans Filloy et Rojano (1984). Cette analyse met également en évidence les approches caractéristiques de chacune des strates au problème posé par la rupture, c'est-à-dire leurs approches spontanées de la résolution des équations non-arithmétiques des séquences C et I.

Dans la section suivante, nous présentons nos efforts pour étudier les effets de l'enseignement utilisant des contextes concrets pour modéliser des équations non-arithmétiques. Nous nous concentrons sur les élèves ayant obtenu des résultats élevés au test de « pré-algèbre » afin de réduire le risque que les « phénomènes de transition » soient dus à des lacunes dans les connaissances arithmétiques de base des élèves.

Modèles concrets pour opérer sur l'inconnue

Bien qu'il y ait des raisons théoriques de croire qu'une approche sémantique de l'apprentissage de l'algèbre est plus susceptible de conduire à de bonnes performances algébriques dans les années ultérieures qu'une approche purement syntaxique, cela ne signifie pas que la construction de la syntaxe algébrique peut être immédiatement et facilement dérivée d'une telle approche. Il est nécessaire de passer par certains processus d'abstraction ; par exemple, des opérations qui sont effectuées sur les éléments de la situation « concrète » où de nouveaux objets et de nouvelles opérations sont modélisés. En retour, ces processus en présupposent d'autres, tels que le processus de généralisation des actions effectuées sur le modèle et le processus de discrimination des différents cas pouvant être modélisés.

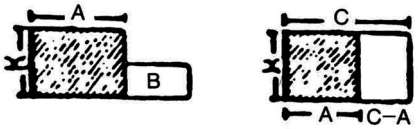
Dans notre recherche, nous avons utilisé deux modèles : le modèle de la balance et un modèle géométrique.

Le modèle géométrique

Appliqué à Ax + B = Cx où A, B et C sont des entiers positifs et C > A. (Des cas numériques particuliers ont été présentés aux enfants)

Étape 1 : traduire les équations dans le modèle

Étape 2 : Comparer les aires



Étape 3 : produire la nouvelle équation (C – A) x = B

Étape 4 : Résoudre la nouvelle équation

Étape 5 : Vérifier la solution

Le modèle de la balance

De nouveau, appliqué à une équation du type Ax + B = Cx

Étape 1 : Traduire l'équation dans le modèle

A objets avec des poids égaux (inconnus) | B objets avec des poids égaux (connus) | C objets avec le même poids (inconnu)

Étape 2 : retrait répété de paires d'objets de poids inconnu en maintenant l'équilibre, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus dans le bac gauche.

B objets | (C – A) objets

Étape 3 : Écrire la nouvelle équation, (C – A)x = B

Étape 4 : Résoudre l'équation

Étape 5 : Vérifier la solution

Les enfants qui présentaient un niveau élevé de compétence pré-algébrique n'ont reçu que la première étape des modèles, leur laissant le soin de développer les étapes suivantes avec le moins d'aide possible de la part de l'intervieweur. Une fois les modèles maîtrisés pour les équations de type Ax + B = Cx, nous leur avons donné des équations de plus en plus complexes : Ax + B = Cx + D, Ax – B = Cx + D, Ax – B = Cx – D, etc., afin de pouvoir observer comment ils effectuaient le transfert vers les cas plus difficiles et comment les processus seraient abstraits des opérations répétées avec les modèles.

Analyse des processus d'abstraction

Au fil des entretiens, les processus d'abstraction des opérations sur les « nouveaux » objets (l'inconnue dans ce cas) se manifestent. Nous avons détecté certains phénomènes.

1. *La perte temporaire des capacités antérieures, associée à un comportement fixe sur les modèles.* Les cas les plus fréquents sont la perte de l'opérativité dans la résolution de l'équation simplifiée (arithmétique), c'est-à-dire l'incapacité de reconnaître (C – A)x = B comme une équation que les élèves pouvaient résoudre syntaxiquement sur la base de leur expérience antérieure. Nous diagnostiquons une « centration » ou « fixation » sur le modèle qui empêche les élèves de détacher l'équation simplifiée de la signification concrète que lui confère le modèle.

Exemple. VT, 13 ans, qui a fait preuve d'une grande compétence dans la résolution d'équations arithmétiques, y compris celles avec des solutions négatives, travaille sur l'équation 8x + 30 = 5x + 9. En utilisant le modèle géométrique, VT déduit l'équation simplifiée 3x + 30 = 9

VT Comment … ?

I Crois-tu pouvoir résoudre celle-ci ?

VT Neuf moins … neuf moins un nombre plus grand que neuf va donner un nombre négatif, divisé par trois …

Il y a une longue pause, et lorsque l'intervieweur demande une réponse, VT commence à réexaminer la configuration géométrique. Finalement, il lui est demandé d'essayer de résoudre l'équation sans utiliser le diagramme.

I Peux-tu la résoudre maintenant ?

VT Non … *[pause]* … Eh bien, si vous voulez, je vais …

[Elle sort sa calculatrice, inverse les opérations et obtient x = –7]

VT recourt au modèle géométrique, bien que son application ne soit pas pertinente pour cet exemple et bien qu'elle sache déjà que la solution sera négative. L'automatisation de ses actions sur les éléments du modèle en cache le sens ; même l'exécution des actions, qui ne fonctionnent pas, n'est pas suffisante pour lui faire abandonner volontairement le chemin de la solution. Puisque VT a précédemment manipulé le modèle avec rapidité et aisance dans de nombreux cas, son adhésion au modèle ressemble ici à un comportement inertiel.

2. *La modification de la notion arithmétique d'équation.* (a) La modification provient de la rencontre d'exemples dont la structure ne correspond pas à celle des exemples utilisés dans la phase pédagogique de la modélisation.

Exemple. MT, aussi âgée de 13 ans, travaille sur une séquence d'items. Elle a déjà fait abstraction des actions sur le modèle et l'ignore dans la résolution des équations. Au début, elle ne perçoit pas l'équivalence des équations $2x + 3 = 5x$, $3 + 2x = 5x$, $5x = 2x + 3$; $5x = 3 + 2x$.

Item 16 : $2x + 3 = 5x$

MT *[Écrit : $2x + 3 = 5x - 2x = 3x$]* Donc x est égal à un

Item 17 : $3 + 2x = 5x$
MT semble incertaine quant au mouvement de x à effectuer. L'intervieweur rappelle l'équation de l'item 16. MT reconnaît maintenant leur équivalence, mais admet qu'elle ne l'avait pas remarquée auparavant.

Item 18 : $5x = 2x + 3$
MT la modifie pour la résoudre comme dans l'item précédent. Elle écrit :

$5x = 2x + 3$
$2x + 3 = 5x$
$2x + 3 = 5x - 2x = 3x$

Item 19 : $5x = 3 + 2x$
Bien que MT reconnaisse que l'équation est « la même » que celle de l'item 18, elle ne lui donne pas la même solution, seulement la même méthode de résolution :

$5x = 3x + 2x \qquad 3x \qquad x = 1$

2. (b) Une autre façon de modifier la notion arithmétique d'équation consiste à donner un sens aux « nouvelles équations ». Un des moyens de leur donner un sens est le processus de vérification.

Exemple. Après avoir résolu 25 items de la séquence I, les premiers avec le modèle et les autres à un niveau syntaxique, MT donne spontanément une interprétation « plus algébrique » de l'équation $10x - 18 = 4x + 6$ (Item 26).

MT En d'autres mots, elles sont équivalentes

I Qu'est-ce que tu veux dire par équivalente ?

MT Si je trouve x et que je lui applique ceci *[en pointant vers le côté gauche de l'équation]* et que j'obtiens un résultat, il doit être égal à ce résultat *[en pointant vers le côté droit].*

3. *L'utilisation de codes personnels pour indiquer les actions à effectuer dans le processus de résolution.* Il s'agit d'une étape intermédiaire sur la voie du développement d'une syntaxe entièrement algébrique, car le code personnel devient inadéquat lorsque les exemples deviennent plus complexes.

Exemple. MT abandonne rapidement l'utilisation du modèle concret et génère sa solution à partir de codes pour indiquer des actions sur les éléments des équations.

Item 13 : $129x + 51 = 231x$
MT écrit : $129x + 51 = 231x - 129x = 102x$

« Donc x est égal à deux » (sic !)

Item 15 : $x + 5 = 2x$
MT écrit : $x + 5 = 2x - x = 1x$

« Un x doit être égal à 5, x est égal à 5 »

Dans le processus de vérification relatif à l'item 13, MT présente également une « perte temporaire des capacités antérieures » à laquelle nous avons déjà fait référence. Malgré le fait qu'elle ait l'équation simplifiée ($51 = 102x$) devant elle, elle perd sa facilité antérieure et commence à se demander (en revenant à un niveau plus primitif) : « Quel nombre fois 102 me donnera 51 ? » Comme ce nombre n'est pas un entier, elle s'attend à ce qu'il soit négatif. Ce n'est que lorsque l'intervieweur attire son attention sur l'opération multiplicative liant x et son coefficient qu'elle retrouve son opérativité antérieure et évoque l'opération inverse pour parvenir à une solution. En d'autres termes, il ne suffit pas qu'elle soit parvenue à un énoncé effectivement algébrique, il fallait aussi que les opérations incorporées dans l'énoncé aient un sens pour elle.

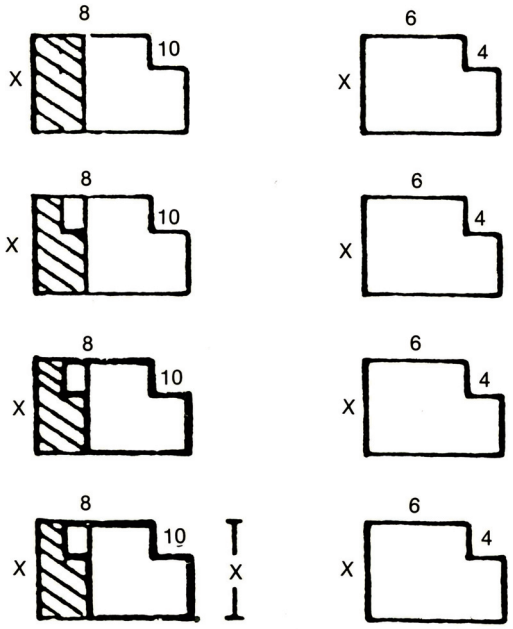
4. *La fixation sur le modèle qui peut persister sous une apparente opérativité algébrique sur les éléments de l'équation.*

Exemple. VT, après 28 items de la séquence non-arithmétique, utilise toujours le modèle géométrique et ne montre aucune intention de l'abandonner.

Item 29 : $8x - 10 = 6x - 4$

VT Peut-être si j'enlève ces parties … *[indiquant les « écarts » que représentent le –10 et le –4]*

Deuxième essaie de VT :



Il y a quelques confusions entre longueurs et aires.

VT Alors, *x* … moins 10 …

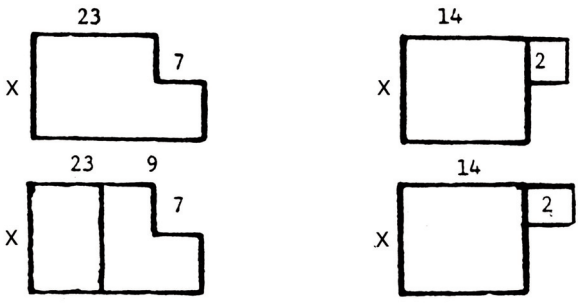
Après un peu d'aide de l'intervieweur :

VT Deux fois *x*, moins 10, plus 4 *[Écrit 2x – 10 + 4]* doit être égal à …

I Rien !

Item 30 : $23x - 7 = 14x + 2$

Sans aide VT produit :



Avec l'aide de l'intervieweur, VT réalise maintenant que l'aire restante n'est pas nulle.

VT Neuf fois *x* moins 7

I À quoi c'est égal ?

VT Ça égal deux. *[Écrit 9x + 7 = 2]*

Item 32 : $10x - 3 = 4x$

Sans aide, VT dit « Ça serait six fois *x*, moins 3, égal à zéro » et écrit $6x - 3 = 0$.

5. *Un détachement du modèle, en transférant l'opérativité sur les coefficients aux termes contenant l'inconnue.* Au moment de la transition, cela peut conduire à l'erreur bien connue de combiner des termes de degrés différents.

Item 11 : $15x + 13 = 16x$

MT $16x$ moins $15x$ égal un. Alors un et 13 égalent 14.

Son attention est portée vers le modèle géométrique.

MT procède à nouveau : $15x + 13 = 16x - 15x$

MT Un *x* … hmm. Il devrait y avoir une fois *x* …

I Et à quoi ça doit être égal ?

MT Treize. *[Écrit 1x = 13]*

6. *La présence d'obstacles particuliers à chaque modèle.*

7. *La reconnaissance, par l'utilisation de modèles, de la diversité des types d'équations du premier degré.*

Les résultats 6 et 7 sont examinés dans les sections suivantes.

Sémantique versus syntaxe

Les résultats 1–7 présentés dans la section précédente découlent de la description et de l'analyse de certaines tendances générales observées dans les performances des élèves de la strate élevée avant et après instruction sur les opérations avec l'inconnue. Cette analyse a ignoré les différences individuelles dans les attitudes ou les tendances des enfants. Ces différences sont toutefois intéressantes lorsque nous abordons le thème « sémantique versus syntaxe », car nous constatons que les élèves manifestent des préférences pour certaines méthodes de résolution, allant des plus opérationnelles et algorithmiques aux plus sémantiques et analytiques.

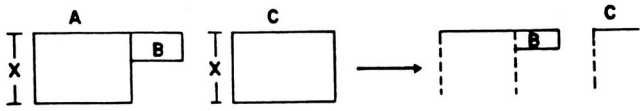
La prise en compte des préférences ou des tendances individuelles des élèves à choisir certaines méthodes de résolution permet de clarifier les interactions entre la syntaxe et la sémantique du langage algébrique. En différenciant les phénomènes d'interaction qui sont fortement liés à une préférence pour les approches algorithmiques ou analytiques, nous minimisons le risque de faire de fausses généralisations sur l'évolution de certaines opérations de la forme concrète à la forme syntaxique. Nous avons analysé en détail les protocoles d'entretien de deux filles après l'intervention pédagogique — deux filles avec des tendances extrêmes et antagonistes : MT, dans la strate élevée, âgée de 13 ans, avec une tendance algorithmique marquée et VT, dans la même strate et du même âge, avec une forte tendance sémantique. Pour les deux élèves, le même modèle a été utilisé dans la phase d'instruction sur les opérations avec l'inconnue.

Nos découvertes les plus pertinentes sont les suivantes :

1. *Le développement spontané de l'utilisation d'un modèle concret pour opérer sur l'inconnue d'une équation n'est pas uniforme,* et ce, même chez les élèves ayant

des niveaux de compétence pré-algébrique comparables. La forme du développement est fortement influencée par la tendance individuelle de l'élève à choisir une approche particulière. Des cas extrêmes ont été détectés dans lesquels les développements dans l'utilisation du même modèle étaient très différents. Dans un cas (VT) avec une tendance opérationnelle, le développement a respecté le contexte du modèle, même lorsque les types d'équations nécessitaient des procédures de modélisation très compliquées. Dans l'autre cas (MT), il y a eu une recherche constante d'éléments syntaxiques dans les actions sur le modèle alors qu'elles étaient répétées d'une équation à l'autre et d'un type d'équation à l'autre. Le sujet s'est détaché de l'aspect sémantique du modèle et a commencé à associer les actions sur le modèle à un langage plus abstrait en créant des codes personnels qui n'appartiennent ni au modèle ni à l'algèbre.

2. *Il existe des obstacles à l'abstraction des opérations du modèle qui ne dépendent pas du modèle particulier utilisé ni des préférences personnelles de l'élève.* Ils découlent du degré d'importance accordé aux aspects de la modélisation qui permettent d'utiliser les connaissances et les opérations précédemment acquises par le sujet. La réduction du nouveau au déjà connu risque de masquer les difficultés d'accès et d'utilisation des nouveaux éléments à apprendre. Dans les processus d'abréviation et d'automatisation des actions sur les deux modèles utilisés, l'opération sur l'inconnue peut devenir cachée. Dans le modèle géométrique, l'abréviation conduit à ignorer la dimension linéaire qui représente l'inconnue ; les opérations sur les surfaces sont réduites à des opérations sur les « données » des équations, empêchant ainsi l'inconnue de jouer un rôle dans le processus de résolution.



Dans le modèle de la balance, en raison de la nature discrète des coefficients de l'inconnue « *x* » ainsi que de ceux des termes constants, des opérations du même type peuvent facilement être effectuées sur les deux types de nombres.

L'automatisation (dans les deux modèles) conduit les élèves à plus tard commettre des erreurs typiquement associées à la syntaxe algébrique, telles que les tentatives d'addition et de soustraction de coefficients de degré différent. Même les sujets fortement attachés au modèle commettent ces erreurs en introduisant des codes personnels. Ces codes personnels peuvent d'ailleurs être produits par l'automatisation des actions :

$Ax + B = Cx + D \longrightarrow (A + B - D) + C$

ou en introduisant des parenthèses « artificielles » lors de la substitution d'une valeur numérique à l'inconnue,

p. ex. $B + Ax \longrightarrow (A + B)\,x$

Comparaison des deux modèles

Une troisième phase de notre étude clinique a impliqué une analyse comparative de l'utilisation du modèle de la balance dans la résolution d'équations non arithmétiques et des processus d'abstraction des opérations sur le modèle au niveau syntaxique pour le modèle géométrique. La comparaison nous a permis d'identifier les phénomènes relatifs aux processus d'abstraction qui ne dépendent pas du modèle utilisé. Nous nous sommes également intéressés aux variations entre les modèles dont nous devrions tenir compte pour recommander des stratégies d'enseignement.

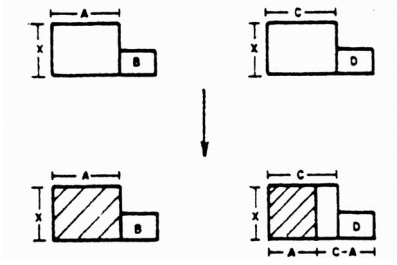
Les résultats les plus pertinents trouvés sont les suivants :

1. *Il existe des façons spécifiques à chaque modèle de traduire les équations dans les termes du modèle qui deviennent des obstacles à l'utilisation ultérieure du modèle.* Dans le cas du modèle géométrique, l'obstacle provient de la décomposition du terme constant B en deux facteurs linéaires (les dimensions de la surface rectangulaire représentant B), c'est-à-dire on trouve un *b* et un *h* tels que $b \times h = B$, et que soit $b = C - A$, soit $h = C - A$. Cette méthode échoue lorsque B n'est pas un multiple de C – A et devient un obstacle à l'extension de la méthode de résolution aux équations non-intégrales.

   Dans le cas du modèle de la balance, l'attribution de valeurs aux poids inconnus peut constituer un obstacle au développement de la stratégie « naturelle » d'annulation des paires de poids identiques. De même, dans le contexte du modèle concret, la notion d'inconnue peut être affaiblie : avec un exemple tel que $4x + 6 = 2x$, la valeur du premier *x* doit être inférieure à la valeur du second.

2. *Certains transferts dans les utilisations du modèle sont plus « naturels » dans un mode que dans l'autre.* Dans le modèle de la balance, le passage de la résolution du type $Ax + B = Cx$ à la résolution du type $Ax + B = Cx + D$ est faible puisque la réalisation d'une « annulation itérée » réduira les deux types d'équations à des équations arithmétiques. Dans ce modèle également, l'équation simplifiée est automatiquement exprimée en termes de modèle et n'a pas besoin d'être traduite en code algébrique.

   Dans le modèle géométrique, en revanche, il n'est pas anodin de constater que la résolution du type $Ax + B = Cx + D$ nécessite la superposition des rectangles représentant les termes du premier degré Ax et Cx.



Toutefois, la transition vers les types Ax – B = Cx et Ax – B = Cx + D, bien qu'impossible pour le modèle de la balance, peut être réalisée dans le modèle géométrique avec l'introduction de l'opération de suppression de zones lorsque des termes négatifs sont impliqués. Cette extension ne porte pas atteinte à la sémantique du modèle.

Bien entendu, dans le cas d'équations à solutions négatives, il n'y a aucun moyen, avec l'un ou l'autre modèle concret, de produire une transformation sensée de l'équation en une équation arithmétique.

Conclusions

Les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que la correction des erreurs algébriques syntaxiques et des difficultés opérationnelles qui se produisent dans la résolution de problèmes ou d'équations complexes ne peut pas être laissée à une résolution spontanée par les enfants sur la base de leurs compréhensions initiales du comportement algébrique opérationnel. Ceci est dû au fait que ces développements spontanés ne vont pas dans le sens du développement algébrique. La correction de ces erreurs est une tâche qui relève de l'éducation et si nous voulons introduire certaines notions algébriques au moyen de modèles (y compris des modèles purement syntaxiques), il semble important de garder en tête les principales composantes de la modélisation.

La modélisation repose sur deux concepts fondamentaux. L'un d'eux est la « traduction », par laquelle les objets et les opérations dans des situations abstraites sont dotés de significations et de sens en recevant des manifestations plus « concrètes ». Cet état des choses au niveau concret représente un autre état des choses au niveau plus abstrait. Dans notre modèle géométrique, par exemple, l'égalité de deux surfaces correspond à l'équivalence de deux expressions algébriques. En partant de notre connaissance de la manière dont les problèmes sont résolus au niveau concret, nous introduisons des opérations qui ont des analogues au niveau plus abstrait et qui conduiront également à une résolution à ce niveau. C'est pourquoi la traduction doit se faire dans les deux sens afin de pouvoir identifier les opérations au niveau abstrait avec les opérations au niveau concret.

Une deuxième composante de la modélisation est la « séparation » des nouveaux objets et opérations introduites au moyen du modèle des détails des significations propres au contexte concret. C'est ce que MT tente de faire dans l'exemple dont nous avons discuté : elle tente de se détacher de la sémantique du modèle concret puisque ce qui est recherché n'est pas une solution à une situation qu'elle sait déjà résoudre, mais plutôt une manière de résoudre une situation plus abstraite au moyen d'opérations plus abstraites. C'est cette deuxième composante qui pousse la modélisation vers la construction d'une syntaxe extra-modulaire.

L'étude que nous examinons ici montre que la maîtrise de la première composante peut affaiblir ou inhiber la seconde. Les sujets comme VT parviennent à une bonne maîtrise du modèle concret, mais, de ce fait, développent une tendance à rester et à progresser dans le contexte concret. La fixation sur le modèle peut retarder la construction d'une syntaxe algébrique puisque celle-ci nécessite de s'affranchir de la sémantique du modèle concret.

Dans les cas à tendance plus syntaxique, comme dans le cas de MT, nous constatons que des obstacles peuvent émerger lors de l'abréviation des actions et la production de codes intermédiaires (intermédiaires entre le niveau concret et le niveau algébrique pleinement syntaxique). Ces obstacles entravent l'abstraction des opérations effectuées au niveau concret et sont dus à l'absence, dans la période de transition, de moyens adéquats pour représenter les états auxquels conduisent les différentes opérations.

Les obstacles proviennent d'une sorte d'« insuffisance essentielle » dans le sens où la modélisation (lorsqu'elle est développée spontanément par les enfants) tend à cacher ce qu'elle est censée enseigner. Lorsque l'une des deux composantes est renforcée au détriment de l'autre, *les nouveaux objets et opérations* deviennent plus difficiles à voir.

La dialectique entre les deux composantes de la modélisation doit être prise en compte par les enseignants en tentant un développement harmonieux des deux processus afin qu'ils ne se gênent pas mutuellement. L'analyse des cas présentés ici montre qu'il s'agit bien là d'une tâche éducative. Le deuxième aspect de la modélisation — la rupture avec les objets et opérations précédents — est un processus qui nie une partie de la sémantique du modèle. Ces négations partielles ont lieu lors des transferts du modèle d'une situation problématique à une autre (dans notre modèle géométrique, elles se produisent lors du transfert d'un type d'équation à un autre); mais lorsque la généralisation du modèle est laissée au développement spontané des enfants, ils sont tout aussi susceptibles de nier des parties essentielles du modèle lui-même (dans le modèle géométrique, ils peuvent nier la présence de l'inconnue, ou l'opération sur l'inconnue, par exemple). L'intervention de l'enseignement est nécessaire au développement des processus de détachement et de négation du modèle, afin de conduire à la construction des nouvelles notions.

Le transfert de la situation-problème (sémantique *versus* syntaxe algébrique) à un niveau d'actions sur un modèle permet de combler les écarts entre l'enseignement et la situation-problème. L'analyse des interactions à ce nouveau niveau fait apparaître des phénomènes didactiques qui mettent en évidence la nécessité d'interventions pédagogiques à des moments clés des processus enclenchés au cours des premières étapes de l'acquisition du langage algébrique.

Notes sur la traduction

[1] Operating on the unknown
[2] The acquisition of algebraic language

Références

Boncompagni, B. (1954) *Intorno ad Alcune Opere di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*. Tipografia delle Belle Arti.

Calandri, P.M. (1974) *Tractato D'Abbacho* (Arrighi, G., dir.). Domus Galilaeana

Eco, U. (1981) *Tratado de Semiotica General.* Editorial Lumen.

della Francesca, P. (1970) *Trattato D'Abbaco* (Arrighi, G., dir.). Domus Galilaeana.

Filloy, E. (1985) History-epistemology-mathematical didactics. Présenté à la *Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Noordwijkerhout, les Pays-Bas, 22–29 juillet, 1985.

Filloy, E. (1986) Teaching strategies for elementary algebra and the interrelationship between the development of syntactic and semantic abilities. Dans Lappan, G. et Even, R. (Dirs.) *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 108–113. Michigan State University.

Filloy, E. et Rojano, T. (1984) La aparición del lenguaje aritmético- algebraico. *L'Educazione Matematica.* **1984**(3), 278–306.

Filloy, E. et Rojano, T. (1984) From an arithmetical to an algebraic thought (a clinical study with 12–13 year olds). Dans Moser, J.M. (Dir.) *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 51–56. Wisconsin Center for Education Research.

Filloy, E. et Rojano, T. (1985) Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. Dans Streefland, L. (Dir.) *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 154–158. State University of Utrecht.

Filloy, E. et Rojano, T. (1985) Operating the unknown and models of teaching (A clinical study among children 12-13 with high proficiency in pre-algebra). Dans Damarin, S.K. et Shelton, M. (Eds). *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 75–79. PME-NA.

Filloy. E., Rosshandler, R. et Trujillo, M. (1985) *Reporte parcial del Proyecto Adquisición del lenguaje Algebraico: Diagnostico sobre pre-algebra, 82/83.* Sección de Matemática Educative CINVESTAV del IPN.

Hughes, B. (1981) *Jordanus de Nemore, De Numeris Datis (A critical edition and translation).* University of California Press.

Kieran, C. (1980) The interpretation of the equal sign: symbol for an equivalence relation vs an operator symbol. Dans Karplus, R. (Dir.) Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 163–169. IGPME.

Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* **12**, 317–320

Matz, M. (1982) Towards a process model for high school algebra errors. Dans Seeman, D. et Brown, J.S. (Dirs.) *Intelligent Tutoring Systems*, 25–50 Academic Press.

De' Mazzinghi, A. (1967) *Trattato di Fioretti* (Arrighi. G., dir.) Domus Galileana.

Rojano, T. (1985) *De la aritmética al álgebra (estudio clínico con niños de 12 a 13 anos de edad)* Dissertation, Centro de Investigacion y de Estudios Avanzados del IPN, Mexico

Rojano, T. (1986) Learning and usage of algebraic syntax: its semantic aspects. Dans Lappan, G. et Even, R. (Dirs.) *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 121–126. Michigan State University.

Viete, F. (1981) *The Analytical Art.* (Witmer, T.R., trad.) Kent State University Press