L'ARBITRAIRE ET LE NÉCESSAIRE—PREMIÈRE PARTIE : UNE MANIÈRE DE REGARDER LE PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

DAVE HEWITT

Je commence avec une proposition:

> *Si je dois me souvenir…, alors je ne fais pas des mathématiques*

et je poursuis avec une anecdote. Pensez à la réponse que vous offririez à Katie avant de lire la suite :

> Katie avait environ quatre ans quand sa mère, Barbara, a parlé de New York dans une discussion avec quelqu'un d'autre :
>
> Katie: Où est New York?
>
> Barbara: Aux États-Unis.
>
> Katie: Pourquoi?

Quand j'ai entendu cet échange, j'ai été frappé par la simplicité de la question et par la difficulté que j'ai éprouvée à trouver une « réponse ». Barbara a donné une réponse qui, d'une certaine façon, reflétait ce que je ressentais—« Parce que c'est ainsi ». Une réponse alternative à la réponse de Barbara aurait pu être de dire que c'était des gens aux États-Unis qui ont décidé de nommer leur ville *New* York en référence à la ville anglaise de *York*. Mais, du point de vue de Katie, cette ville pourrait être n'importe où. Il pourrait n'y avoir aucune raison pour justifier que cette ville *doive* être aux États-Unis pour Katie. Parce qu'il ne *doit* pas en être ainsi: il se trouve simplement que c'est le cas. La seule manière qu'a Katie de savoir où se trouve New York est d'en être informée par quelqu'un qui le sait déjà, ou en obtenant des informations provenant d'autres sources—que ce soit un livre, la télévision, une carte ou quelque autre moyen.

C'est la même chose si on me demande le nom de quelqu'un, quelqu'un que je n'ai jamais rencontré et dont je n'ai jamais entendu parler auparavant. Si je peux voir cette personne, je peux la regarder et me questionner sur son nom, essayer de le deviner. Si je tente une réponse à pareille devinette, je dois attendre qu'on me confirme ou pas le nom en question. Pour connaitre le nom de quelqu'un, on doit me le dire et encore, je dois avoir confiance que la personne qui m'en informe ne me mente pas. Même avec cette confiance, apprendre le nom d'une personne me demandera du travail pour le retenir et l'associer à cette personne. De tels éléments relèvent du domaine de la mémoire. Connaître le nom de quelqu'un va nécessiter d'en être informé, puis il me faudra le mémoriser si je veux être en mesure de le savoir ultérieurement.

Je peux bien sûr inventer un nom pour cette personne; cependant, j'aurai du mal à y faire référence lorsque je communiquerai avec d'autres personnes puisque nous ne partagerons pas le même référent. Inventer mon propre nom pour cette personne peut avoir un certain intérêt pour moi, mais s'avérer très peu utile pour communiquer avec les autres. Donc, me voilà à nouveau avec le besoin d'être informé du nom de cette personne et de le mémoriser pour des usages futurs.

Quel pourrait être l'équivalent mathématique de l'anecdote de Katie. Encore une fois, réfléchissez à la manière dont vous réagiriez avant de lire la suite…

> Élève : Combien de côtés a un carré?
>
> Enseignant: Quatre
>
> Élève : Pourquoi?

La seule raison pour laquelle un carré a quatre côtés relève d'une décision qui a été prise il y a de cela très longtemps d'appeler « carrés » les figures à quatre côtés dotées de certaines propriétés spécifiques. Il n'y a rien à propos de ces figures qui fasse en sorte qu'elles *doivent* s'appeler ainsi—dans d'autres langues, les mêmes figures sont nommées autrement. Regarder attentivement des figures n'aidera pas un élève à deviner comment on les appelle, tout comme le fait d'observer quelqu'un ne révèle pas son nom. Tous les noms, en mathématiques ou ailleurs, sont des choses dont les élèves doivent être informés. Le rôle de l'enseignant est en partie d'informer les élèves de ces noms.

Une fois que les élèves en sont informés, leur travail n'est pas terminé. Ils doivent mémoriser le mot et l'associer aux figures munies de ces propriétés particulières. Un mot doit être mémorisé, mais ce n'est pas tout, il doit également être associé aux choses appropriées. C'est typique du domaine de la mémoire. Souvent, les élèves se souviennent avec succès d'un mot, mais ne font pas l'association juste. Par exemple, un élève pourrait ne pas nommer « carré » ce qui est représenté à la Figure 1 parce qu'il associe au *carré* la propriété d'avoir des côtés horizontaux et verticaux.

Traduction autorisée de Hewitt, D. (1999) Arbitrary and Necessary Part 1: a Way of Viewing the Mathematics Curriculum. For the Learning of Mathemathics 19, 3.

Même lorsque les noms sont générés de façon systématique à partir de règles et de racines linguistiques particulières, comme c'est le cas pour « octogone », « heptagone » et « hexagone », cela ne permet pas à l'élève de savoir *avec certitude* qu'un polygone à cinq côtés sera appelé « pentagone ». L'exemple du « carré » est très parlant. En effet, un polygone à quatre côtés n'est pas appelé « tétragone ». Puisque les noms sont socialement et culturellement déterminés, quelqu'un de cette culture devra alors faire savoir au novice si ses suppositions— plutôt sensées—de « pentagone » et de « tétragone » correspondent (ou non) aux noms acceptés dans cette culture.

Arbitraire

Les noms et les étiquettes peuvent sembler arbitraires pour les élèves, puisqu'il ne semble pas y avoir de raison pour laquelle ils *doivent* être ainsi. En effet, il n'y a aucune raison qui exige que quelque chose porte un nom particulier. Voici une transcription de Ginsburg (1977) d'une conversation avec une élève de deuxième année, Kathy :

I Pourquoi tu écris 13 comme ça, un 1 et un 3 après?

K Parce qu'il y a un dizaine, oui? Alors on met 1. Je ne sais pas pourquoi c'est comme ça. Ils auraient pu mettre dix unités et un 3, mais pour nous ça donnerait 103, alors on mets juste le 1 pour dix et 3 pour le trois qui s'ajoute au dix. (p. 88)

I Why do you write 13 like that, 1 followed by a 3?

K Cause there's one 10 right? So just put 1. I don't know why it's made like that. They could put 10 ones and a 3, but the way we write it, it would be 103 so they just put one for 10 and 3 for the extra 3 that it adds on to the 10.

Kathy montre qu'elle est consciente que le symbolisme lié à l'écriture des nombres est un choix et qu'il aurait pu en être autrement. Elle propose même une autre façon de faire. Les noms (j'inclus les étiquettes et les symboles dans cette catégorie pour faciliter l'écriture) proviennent de choix qui ont été faits et acceptés par une communauté donnée. Si un élève souhaite devenir membre de cette communauté, alors l'élève doit accepter ce nom plutôt que de le *questionner*.

Je dis que quelque chose est *arbitraire* si la seule manière de connaitre cette chose est d'en être informé par une source externe—que ce soit par un enseignant, un livre, l'internet, etc. Si quelque chose est arbitraire, alors cette chose est arbitraire pour tous et doit être mémorisée pour être sue. Gattegno (1987) affirme que:

> Il y a la connaissance qui se distingue nettement de la conscience—la connaissance uniquement liée à la mémoire, telle que l'étiquette de tel objet ou un numéro de téléphone, des éléments arbitraires. Sans quelqu'un d'autre, cette connaissance n'existerait pas pour nous (p. 55)

> There is knowledge that is distinguished sharply from awareness—the knowledge solely entrusted to one's memory, such as the label for such an object or a telephone number, items which are arbitrary. Without someone else, that knowledge would not exist for us.

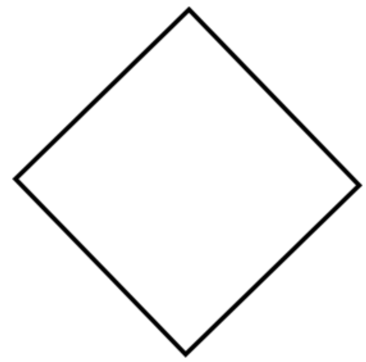


Figure 1. Un carré?

Ce ne sont pas seulement les étiquettes, les symboles ou les noms qui sont arbitraires. Le programme de mathématiques est truffé de conventions issues de choix qui ont été faits à une certaine époque. Pour quiconque apprend ces conventions aujourd'hui, elles peuvent sembler procéder de décisions arbitraires. Par exemple, pourquoi la coordonnée en x est-elle écrite en premier et la coordonnée y en second? Ce n'est qu'une convention, et il n'y a aucune raison pour que le x apparaisse en premier. Ainsi, un élève pourrait choisir d'écrire le y en premier! La question des conventions peut être difficile pour les enseignants parce qu'il n'y a aucune raison à offrir aux élèves qui voudraient faire les choses à leur manière et travailler selon des conventions qui ne sont pas celles qui sont culturellement acceptées. Il n'y a aucune raison à donner pour justifier que ces conventions *doivent* être ainsi. Certaines images sont proposées pour pallier : « tu marches le long du couloir puis tu montes les escaliers » ou « x vient avant y dans l'alphabet », mais ce sont des histoires inventées par les enseignants principalement comme aide-mémoire plutôt que comme justification. La vérité est qu'il n'y a aucune raison qui justifie que x doive venir en premier.

Je me souviens d'un moment où je jouais au Snooker [1] avec mon neveu de cinq ans, Robert, sur une petite table. Je venais d'empocher la boule jaune. J'étais à côté de la verte et j'étais snooké sur la brune. Robert a affirmé que la brune était la suivante. J'ai alors dit que la verte était la suivante. Il a insisté sur la brune. Je ne pouvais donner aucune raison pour justifier que la prochaine devait être la verte; il n'y avait rien dans les couleurs qui signifiait que le vert devait venir après le jaune et c'était une convention que Robert n'allait pas facilement accepter, d'autant plus qu'il était dans son intérêt de ne pas le faire! Amener les élèves à accepter et à adopter des noms et des conventions n'est pas toujours facile.

Le fait que 360 ait été choisi comme nombre d'unités dans un tour entier est lié à de multiples raisons; autant aux personnes qui ont pris cette décision qu'à ce dont ils étaient conscients à l'époque. Les Babyloniens avaient un système de numération basé sur 60 et s'intéressaient au rapport entre le périmètre d'un hexagone régulier et la circonférence d'un

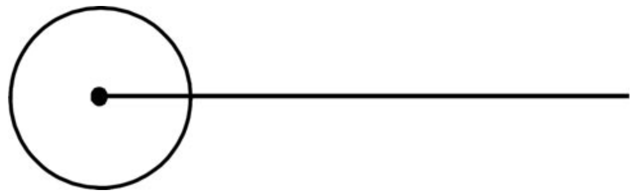


Figure 2. Enseignant : « Comme on peut le voir sur ce schéma, un tour complet doit être divisé en 360 »

cercle. Sachant que le périmètre d'un hexagone régulier vaut 6 fois le rayon du cercle circonscrit ils en vinrent à diviser le cercle en 6 × 60, soit 360 degrés. Si une telle décision devait être prise aujourd'hui avec notre système métrique, 100 aurait peut-être semblé être un choix tout aussi naturel. Pour un élève de classe vivant dans ce monde métrique, 360 est loin d'être un choix évident. Un élève ne peut pas regarder attentivement un tour complet, l'analyser et en venir à la conclusion qu'il faut le fractionner en 360 unités (voir la Figure 2).

Clausen (1991) écrit:

> J'ai longtemps pensé que notre utilisation des degrés pour mesurer les tours (angles) était très arbitraire. Il est impossible pour un enfant (ou un adulte) d'*avoir l'intuition* qu'il y a 360 degrés dans un tour complet. C'est un savoir totalement arbitraire, formel, vrai-parce-que-l'enseignant-le-dit. (p.16)
>
> > I have long felt that our use of degrees to measure amounts of turn (angles) is very arbitrary. There is no way that a child (or adult) can *intuit* that there are 360 degrees in a whole turn. This is totally arbitrary, formal, true-because-teacher-says-so knowledge

Un enseignant doit informer l'élève du nombre de degrés qu'il y a dans un tour complet. Une manière de rendre le tout moins arbitraire consiste à introduire une perspective historique dans la salle de classe. Les élèves peuvent apprendre une partie de l'histoire à travers cette approche, mais ils ne se développeront pas mathématiquement en mémorisant l'arbitraire. Comme le fait remarquer Pimm (1995):

> La façon de penser incarnée dans la simple phrase « cela est ou cela n'est pas » est profondément mathématique. (p. 187)
>
> > The way of thinking embodied in the simple phrase 'it is or it is not' is profoundly mathematical.

Toutefois, *ça pourrait être* n'est pas si profondément mathématique! Et l'arbitraire est plein de *ça pourrait être.* Contrairement à la nature arbitraire des degrés, Clausen poursuit:

> En revanche, l'idée des demi-tours, des quarts de tour, des deux tiers de tour, etc., a une signification réelle et valable en soi. Si je tourne jusqu'à ce que je sois face à l'origine de ce tour, alors je sais que j'ai fait un tour complet. Il n'y a rien de nouveau à apprendre—pas de nombre arbitraire comme 37 dont l'enseignant doit m'informer. Et je peux comprendre par moi-même ce que signifie demi-tour, quart de tour, etc., en utilisant ma propre expérience de demi-tour, de quart de tour ou autre. Les fractions de tour ont une validité intuitive qui manque au concept de degrés. (p.16)
>
> > On the other hand, the idea of half-turns, quarter-turns, two-thirds-turns, and so on, has a real, valid meaning in itself. If I turn right round, so that I'm facing the way I was to start with. Then I know that I have done a whole turn. There is nothing new to learn – no arbitrary number, like 37, for Teacher to tell me. And I can work out myself what half-turns, quarter-turns and so on mean, using my own experience of half-way round, or a quarter round, or whatever. Fractions of a turn have an intuitive validity which the concept of degree lacks.

Ici, Clausen souligne le caractère « c'est ou ce n'est pas » des fractions de tours, objets que l'on peut connaître sans en être informé par un enseignant.

Nécessaire

Il y a des aspects du programme de mathématiques dont les élèves n'ont pas besoin d'être informés. Ce sont des choses que les élèves pourraient construire par eux-mêmes. Ce sont des éléments du programme de mathématiques qui ne relèvent pas de conventions sociales, mais plutôt des propriétés qui peuvent être inferées à partir de ce qu'on connaît déjà. Comme Clausen l'a fait remarquer, je peux me rendre compte de certains aspects de l'acte de tourner. Par exemple, si je tourne un quart de tour puis un quart de tour à nouveau, j'ai fait un demi-tour. Il est possible de connaître d'autres fractions de tour sans avoir à en être informé. Ainsi, le contenu du programme de mathématiques peut être divisé en éléments arbitraires et éléments nécessaires.

Tous les élèves devront être informés de l'arbitraire. Cependant, le nécessaire dépend d'une certaine conscience que l'élève a déjà. Par exemple, il est nécessaire que la longueur du côté du triangle dans la Figure 3 soit de $\sqrt{3}/2$.

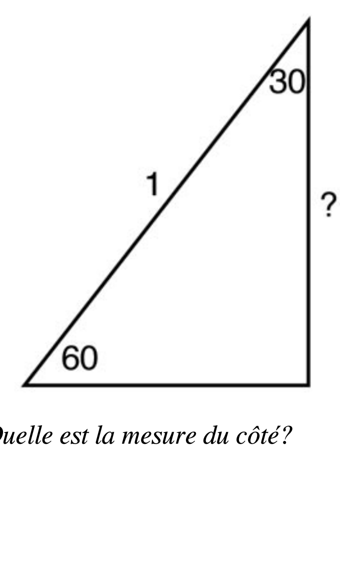


Figure 3. Quelle est la mesure du côté?

Arbitraire	*Tous* les élèves *doivent* être informés de ce qui est arbitraire par quelqu'un d'autre	*Domaine de la mémoire*
Nécessaire	*Certains* élèves *peuvent* devenir conscients de ce qui est nécessaire sans en avoir été informés par quelqu'un d'autre.	*Domaine de la conscience*

Figure 4. Arbitraire et nécessaire.

Cependant, ce ne sont pas tous les élèves qui en sont conscients. Ainsi, bien que cette propriété soit nécessaire, cela n'implique pas que tous les élèves soient en mesure d'arriver à pareille conclusion, mais seulement que *quelqu'un* est capable d'y arriver sans en être informé.

Ce qui est nécessaire peut être inféré: il s'agit seulement de savoir si tels élèves en particulier ont la conscience requise pour le faire. Si ce n'est pas le cas, le choix d'enseigner pareil contenu à ce moment n'est peut-être pas adéquat. Par exemple, j'ai fait le choix de ne pas enseigner l'intégration des fonctions trigonométriques aux élèves de onze ans à qui j'ai enseigné. Si un élève a la conscience requise pour déduire quelque chose en particulier alors je suggère que le rôle de l'enseignant n'est pas de l'en informer, mais plutôt d'introduire des tâches qui aideront l'élève à faire usage de cette conscience pour en venir à connaitre le nécessaire. Ce qui est nécessaire est dans le domaine de la conscience, alors que l'arbitraire est dans le domaine de la mémoire (voir Figure 4).

Regard sur le programme

J'ai demandé à de futurs enseignants en formation de dresser une liste des éléments du programme de mathématiques qui ne peuvent être déduits (ça pourrait être), et ceux qui peuvent être déduits (ce doit être). Ils ont élaboré la liste de la Figure 5.

Une telle division du programme de mathématiques en contenus arbitraire et contenu nécessaire a des racines philosophiques liées aux notions de «contingent» et de «nécessaire». Kripke (1996) a écrit:

> Si [quelque chose] est vrai, aurait-il pu en être autrement? [...] Si la réponse est « non », alors ce fait à propos du monde est nécessaire. Si la réponse est « oui », alors ce fait à propos du monde est contingent. (p. 36)

> If [something] is true, might it have been otherwise? […] If the answer it 'no', then this fact about the world is a necessary one. If the answer is 'yes', then this fact about the world is a contingent one.

Il est vrai que la coordonnée *x* est écrite avant la coordonnée *y*, cependant, il aurait pu en être autrement. Un choix différent aurait pu être fait de placer la coordonnée *y* en premier. Ce serait tout à fait possible et les mathématiques qui pourraient être basées sur une telle convention seraient tout aussi cohérentes. Le fait que la coordonnée *x* vienne en premier est donc une vérité contingente.

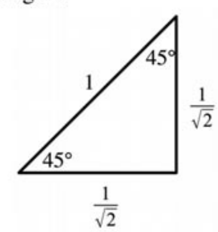
Ne peut être déduit (*pourrait* être ainsi)	**Peut être déduit (*doit* être ainsi)**
Nom des figures	Angles intérieurs des polygones réguliers
Définitions de…	$V = IR \Rightarrow I = \frac{V}{R}$
Mesurer un angle	Solution d'une équation linéaire
Coordonnées x et y	La multiplication d'un nombre par < 1 ou > 1
Le poids d'un kg	Estimations grossières de mesures
La longueur d'un mètre	2×3
Terminologie : ex. le nom des théorèmes, par exemple le théorème des facteurs.	Trouver les facteurs de a^3+b^3
Mots/étiquettes	Trouver les mesures des angles et des côtés dans un triangle, par exemple dans ce triangle : 
	Propriété des nombres premiers
	Symétries
Se résume à : mots, symboles, notation et conventions.	Se résume à : propriétés et relations.

Figure 5. Une manière de deviser le programme

Nozick (1984) a écrit:

> Énonçons le principe de raison suffisante comme suit: chaque vérité a une explication. Pour chaque vérité *p* il y a une vérité *q* qui se trouve dans la relation explicative E à *p* [...] Toute autre vérité sans explication n'est qu'un fait brut et arbitraire. (pp. 140–141)

> Let us state the principle of sufficient reason as: every truth has an explanation. For every truth *p* there is some truth *q* which stands in the explanatory relation E to *p*. […] When any other truth holds without an explanation it is an arbitrary brute fact.

Il n'y a aucune raison qui permette d'expliquer pourquoi la coordonnée *x doit* être en premier. Il s'agit donc d'un fait arbitraire tout comme une grande partie du programme de mathématiques à propos des coordonnées. Plusieurs chapitres de manuels scolaires s'intéressent au développement chez les élèves d'habiletés à dessiner et étiqueter des axes, à localiser un point dans le plan un point connaissant ses coordonnées et à reconnaitre et écrire les coordonnées de points en sachant que la coordonnée x précède le y. Ces connaissances sont toutes arbitraires et je propose que les mathématiques ne reposent pas sur l'arbitraire, mais se trouvent dans ce qui est nécessaire. *Avant de poursuivre votre lecture, pouvez-vous penser à quelque chose dans le programme d'étude à propos des coordonnées qui soit nécessaire et non arbitraire?*

Je crains qu'on ne consacre que trop peu de temps à ce qui est nécessaire et trop de temps à la mémorisation et à la mise en pratique des conventions. Les mathématiques sont dans les propriétés—et les propriétés peuvent être construites ou découvertes. Cela implique qu'une grande partie des chapitres sur les coordonnées ne traite pas de mathé matiques.

Quelles sont alors les mathématiques qui se cachent sous l'étiquette de coordonnées? Il y a la conscience qu'une position ne peut être décrite que lorsqu'on part de quelque part: une origine est requise. Ce n'est pas quelque chose dont les élèves doivent être informés par un enseignant; les élèves peuvent en prendre conscience par le biais d'une tâche bien construite. Certaines bases de vecteurs (pas nécessairement à angles droits) ou leurs équivalents (tels que les angles dans le cas de coordonnées polaires) sont également des éléments nécessaires, bien qu'ils ne doivent pas être connus sous ces noms. Ces quelques éléments non liés à la pratique de conventions montrent où peuvent se trouver les mathématiques dans le concept de coordonnées. Je ne dis pas que l'acceptation et l'adoption de conventions ne sont pas importantes dans les classes de mathématiques, mais il faut se rendre compte que ce n'est pas là où les mathématiques se trouvent. Je me demande combien de temps est consacré à l'arbitraire comparativement à là où les mathématiques se trouvent réellement.

Approches pédagogiques et leurs conséquences

Considérant cette division du programme en contenus arbitraires et contenus nécessaires, comment un enseignant peut-il alors travailler avec sa classe ? Par exemple, en travaillant sur une tâche qui impliquait plusieurs lancers de deux dés à six faces et qui demandait de trouver la somme la plus souvent obtenue, Sam, un élève, a dit à l'enseignant ne pas connaître le nom mathématique du résultat le plus souvent obtenu. L'enseignant dit alors à Sam qu'il était présent au cours lorsque ce nom a été enseigné et qu'il devrait y réfléchir.

Je me suis demandé ce à quoi il était possible de « réfléchir ». Un élève se souvient, ou ne se souvient pas, du nom « mode » et Sam indique clairement qu'il ne s'en souvient pas. Il n'y a rien ici qui puisse être inféré. La seule option est de se souvenir (ce qu'il ne peut pas faire) ou d'en être informé par quelqu'un d'autre. Inviter les élèves à « réfléchir » est adéquat pour ce qui est nécessaire, mais pas pour ce qui est arbitraire. Comme le nom en question n'avait pas été mémorisé en cours, le problème qui se pose maintenant pour l'enseignant est de déterminer comment aider l'élève à se souvenir de ce nom. Le rôle de l'enseignant en ce qui concerne l'arbitraire est d'aider à la mémorisation. Pour ce qui relève du nécessaire, l'enseignant n'a cependant pas besoin d'en informer les élèves, car ce qui est nécessaire peut être inféré : son rôle est alors de travailler dans le

	Élève	**Enseignant**	**Manière d'enseigner**
Arbitraire	*Tous* les élèves *doivent* être informés de ce qui est arbitraire par quelqu'un d'autre	Un enseignant *doit* informer les élèves de ce qui est arbitraire.	*Aide à la mémorisation*
Nécessaire	*Certains* élèves *peuvent* devenir conscient de ce qui est nécessaire sans en avoir été informé par quelqu'un d'autre.	Un enseignant n'a pas à informer les élèves de ce qui est nécessaire.	*Éduque à la conscience*

Figure 6. Manières d'enseigner.

domaine de la conscience plutôt que celui de la mémoire. Par exemple, le « fait » que la somme des angles intérieurs d'un triangle est équivalente à un demi-tour est une chose dont les élèves peuvent prendre conscience par eux-mêmes. Le rôle de l'enseignant est alors de provoquer cette conscience en donnant une tâche qui permettra de l'éveiller chez l'élève. Le rôle de l'enseignant est d'éveiller la conscience de ses élèves plutôt que de leur donner des éléments à mémoriser (voir la Figure 6).

Si un enseignant décide d'informer les élèves d'un contenu mathématique nécessaire, il le traite alors comme s'il était arbitraire, comme s'il s'agissait de quelque chose dont on devait être informé. Par exemple, si un enseignant informe ses élèves que la somme des angles intérieurs d'un triangle équivaut à un demi-tour au lieu d'offrir aux élèves une tâche leur permettant d'en prendre conscience, les élèves sont alors dans l'obligation d'accepter que ce l'enseignant dit est vrai. Dans ce cas, cela devient un autre « fait » à mémoriser. J'appelle ceci un *savoir reçu* [2].

Les élèves peuvent toujours utiliser leurs conscience pour essayer de comprendre pourquoi ce savoir reçu est vrai. Si un élève réussit, cela devient alors un fait nécessaire et retourne légitimement dans le domaine de la conscience. Cependant, trop souvent l'élève accepte simplement ce savoir reçu et le traite comme quelque chose à mémoriser, ou encore à oublier.

Dans une leçon que j'ai observée et où des jeunes de 14–15 ans travaillaient sur la résolution d'équations, un des élèves avait du mal à réorganiser une des équations. Il avait écrit:

$$x-y=2$$
$$y=2-x$$

Je lui ai demandé d'expliquer le « – » devant le y. Sa réponse a été de modifier la seconde équation :

$$y=2+x$$

Je lui ai dit que je croyais qu'il avait agi correctement en enlevant le x, mais qu'il y avait toujours un signe « – » devant le y. J'ai alors placé un « – » devant le y dans la deuxième équation:

$$-y=2-x$$

Il a alors changé les deux soustractions pour des additions en disant que « deux négatifs donnent un positif » :

$$+y=2+x$$

Voici un exemple d'élève qui a le souvenir d'un savoir reçu—« deux négatifs donnent un positif »—mais qui ne se souvient pas des situations dans lesquelles ce savoir reçu est approprié. Il s'agit d'une phrase dont il s'est souvenu, mais il n'a pas la conscience pour l'accompagner. Plutôt que de baser ses actions sur une conscience mathématique des opérations inverses, ses actions sont dirigées par le souvenir de quelque chose à « faire » en présence de deux négatifs.

Les transformations d'équations reposent sur ce qui est nécessaire. Un enseignant qui donne une telle phrase transforme le concept de transformation d'équation en savoir reçu qu'un élève peut alors tenter de mémoriser. Le problème avec la mémoire est qu'elle permet d'oublier. Dans le cas relaté, la phrase est restée, mais la situation à laquelle elle se rapporte (qui est relativement complexe) est oubliée.

Une explication peut accompagner le savoir reçu et expliquer pourquoi celui-ci est vrai. Un enseignant peut expliquer pourquoi la somme des angles intérieurs de tout triangle équivaut à un demi-tour. Qu'un enseignant donne une explication ne signifie pas pour autant que les élèves aient développé la conscience requise pour la comprendre, ou encore qu'ils fassent plus tard le travail requis pour reconnaitre pourquoi ce qu'ils savent maintenant doit être ainsi. Une explication minutieuse peut favoriser l'utilisation de cette conscience pour comprendre la véracité de ce « fait ». D'autres élèves peuvent ne pas avoir la conscience suffisante ou choisir de ne pas utiliser la conscience dont ils disposent pour comprendre cette vérité. Pour ces élèves, le fait que les angles intérieurs de tout triangle totalisent la moitié d'un angle plein, ce qui correspond à un demi-tour, reste un savoir reçu dans le domaine de la mémoire, et ce, malgré les efforts de l'enseignant.

Poincaré (1920) a considéré le scénario suivant :

> De même nos élèves croient le [3] savoir quand ils commencent à étudier sérieusement les mathématiques. Si, sans autre préparation, je viens leur dire : « Non, vous ne le savez pas; ce que vous croyez comprendre, vous ne le comprenez pas; i1 faut que je vous démontre ce qui vous semble évident », et si dans la démonstration je m'appuie sur des prémisses qui leur semblent moins évidentes que la conclusion, que penseront ces malheureux? Ils penseront que la science mathématique n'est qu'un entassement arbitraire de subtilités inutiles; ou bien ils s'en dégoûteront; ou bien ils s'en amuseront comme d'un jeu et ils arriveront à un état d'esprit analogue à celui des sophistes grecs. (p. 135)

Les explications d'un enseignant sont souvent basées sur sa propre conscience des éléments en jeu et peuvent donc faire intervenir des éléments que les élèves ne trouvent pas si *évidents*—des éléments dont les élèves n'ont pas conscience. Comme le souligne Poincaré, pour de nombreux élèves, les mathématiques peuvent devenir « un entassement arbitraire de subtilités inutiles » ou simplement un jeu de symboles (bien que je doute qu'il soit jugé « amusant » par la plupart).

La Figure 7 offre un résumé des choix disponibles à l'enseignant en ce qui concerne l'arbitraire et le nécessaire, et de leurs conséquences sur le travail des élèves. Je vais revenir sur une partie de ce résumé en considérant la liste de stratégies d'enseignement offerte par Merttens (1995), liste qui contient *Giving instructions (donner des instructions)*:

	ARBITRAIRE		NÉCÉSSAIRE	
ENSEIGNANT	L'enseignant informe	L'enseignant n'informe pas	L'enseignant informe	L'enseignant donne une activité appropriée
ÉLÈVE	Les élèves ont à mémoriser	Les élèves ont à inventer	Savoir reçu – Les élèves ont à mémoriser à moins qu'ils ne réussissent à utiliser leur conscience pour en venir à comprendre.	Les élèves utilisent leur conscience pour en venir à comprendre.

Figure 7. Un résumé des choix de l'enseignant et des conséquences sur les manières de travailler des élèves.

> Donner des instructions : C'est la stratégie la plus alignée avec l'enseignement traditionnel et peut-être celle qui a suscité le plus de critiques défavorables au cours des vingt dernières années. [...] L'instruction, ou l'enseignement de procédures, est la pratique qui se produit lorsqu'une personne:
>
> 1. donne une recette;
> 2. donne une série de directives;
> 3. montre comment se déplacer sur une piste numérotée;
> 4. explique comment faire une multiplication;
> 5. explique les règles du Monopoly;
> 6. montre comment écrire en lettres attachées;
> 7. montre comment mettre une veste de sauvetage;
> 8. donne une procédure pour traverser la rue de manière sécuritaire (p. 7, numérotation par Hewitt)
>
> > Giving instruction : This is the strategy most aligned with traditional teaching, and perhaps the one which has come in for most adverse criticism over the last twenty years. […] Instruction, or the provision of procedures, is the practice which occurs when someone:
> >
> > 1. gives a recipe;
> > 2. gives a set of directions;
> > 3. shows the way to move along a numbered track;
> > 4. explains how to do a multiplication sum;
> > 5. explains the rules of Monopoly;
> > 6. demonstrates how to write a series of joined-up letters;
> > 7. shows how to put on a life jacket;
> > 8. gives the procedure for crossing the road safely

En regardant cette liste et en l'analysant en termes d'arbitraire et de nécessaire, j'affirme que tous les éléments sauf le numéro 4 sont arbitraires (je m'abstiens pour le numéro 3, car je ne suis pas sûr de ce que Merttens voulait exprimer). Cela signifie qu'il est tout à fait approprié de donner des instructions pour traiter de ces exemples. Les élèves n'en viendront pas à connaitre une recette *particulière* ni à savoir jouer au Monopoly (d'une manière *particulière*), ni à écrire en lettres attachées (d'une manière *particulière*) *etc*., à moins qu'ils n'en soient informés. Comme indiqué à la Figure 7, si un enseignant choisit de ne pas en informer les élèves, ils seront cependant tout de même tout à fait capables d'inventer des recettes, des façons de jouer au Monopoly, des manières d'écrire en lettres attachées, *etc.*

L'exemple 4 est toutefois différent, car la multiplication se rapporte au nécessaire. Deux fois trois donne six et non pas cinq (je ne fais pas référence aux mots—les signifiants—*deux, trois, multipliés,* etc., mais au signifié—doubler, l'opération typiquement associée au mot multiplier). Les élèves peuvent inventer ce que font deux fois trois—par exemple, sept—mais ils peuvent se tromper! Bien qu'il existe différentes façons d'effectuer une multiplication, la question de la multiplication des nombres se rapporte au nécessaire et donc, une multiplication sera soit mathématiquement correcte, soit incorrecte. Si les élèves sont simplement informés de la manière de faire une multiplication, alors il s'agit d'un savoir reçu.

Merttens écrit ensuite:

> Instruire les enfants c'est leur donner des procédures « faites ceci, ensuite faites cela ». C'est aussi *leur reconnaître leur propre intelligence.* C'est supposer qu'avec notre aide ils utiliseront ces procédures au bon moment et de la manière appropriée, qu'ils auront l'intelligence non seulement de les adopter, mais aussi de les adapter, en les formulant en leurs termes et pour leurs propres raisons, en les articulant (dans tous les sens du terme) dans leurs propres contextes; [...] La *compréhension* dont on parle beaucoup viendra lorsqu'ils utiliseront la procédure, ou plus tard, ou encore jamais, car ils n'auront jamais eu besoin de faire de liens entre cet algorithme et d'autres notions. C'est en ce sens que comprendre, c'est traduire, c'est prendre ce qui a été donné et l'incorporer à sa propre histoire. (p. 7)
>
>> To instruct children is to give them a series of « now do this, then do that » procedures. *It is also to credit them with their own intelligence.* It is to assume that, with our help, they will utilize these procedures as and when appropriate, that they will have the intelligence not only to adopt but to adapt them, phrasing them in their own terms and for their own reasons, articulating them (in all sense of the word) in their own contexts;[…] The much-talked-of understanding will either come as they use the procedure, or later on, or even not at all because they never have the need to relate that particular algorithm to any other aspect of the subject. To understand, in this sense, is to translate, to incorporate what one has been given into one's own story.

Les élèves peuvent bien utiliser « leur propre intelligence » en prenant conscience des raisons pour lesquelles certaines procédures produisent de réponses correctes. Dans ce cas, le savoir reçu devient quelque chose de nécessaire, ce qui a été donné devient incorporé « à sa propre histoire ». J'ai cependant vu trop de salles de classe où ne sont donnés aux élèves ni le temps, ni même la motivation pour travailler à essayer de *comprendre* ce savoir qui leur a été offert. Trop souvent, les cours de mathématiques semblent avoir pour objectif que l'élève reçoive un savoir de l'enseignant et s'exerce à la reproduire, pour ensuite passer au prochain élément à transmettre. Je crois donc qu'il y a d'autres raisons que le fait qu'« ils n'auront jamais besoin de faire de liens entre cet algorithme et d'autres notions » qui expliquent pourquoi les élèves ne *comprennent* pas.

Données—propriétés supposées

Lorsque la conscience est utilisée pour connaître quelque chose de nécessaire, il peut arriver que certaines des informations disponibles ne soient ni des noms ni des conventions arbitraires. Par exemple, à la Figure 8, la tâche pourrait être de trouver l'aire et le périmètre du rectangle. Le périmètre et l'aire sont des propriétés nécessaires, car ils peuvent être inférés, mais seulement parce que certaines propriétés ont déjà été données, par exemple la longueur des côtés du rectangle. Je décris ces propriétés comme étant des *données*.

Ainsi, ce qui est nécessaire est conséquence de certaines données qui ont été acceptées. Si une quantité insuffisante de propriétés étaient données pour évaluer l'aire, elles pourraient alors être créées—en choisissant un nombre ou encore une étiquette. Par exemple, l'énoncé suivant concernant l'aire:

aire = $L \times l$

peut être articulé si et seulement si les inconnues L et l font référence à quelque chose. Il convient de noter qu'il y a une combinaison d'étiquettes arbitraires (ici, L et l) et des propriétés auxquelles elles réfèrent—la longueur des côtés du rectangle. Ces étiquettes sont arbitraires, mais ce qu'elles représentent sont ce que j'appelle les données. L'arbitraire (les étiquettes) est adopté et les données (les propriétés) sont acceptées et travaillées pour trouver ce qui est nécessaire.

Les données peuvent être connues d'un élève de trois façons:

- premièrement, un élève peut les « recevoir », par exemple verbalement d'un enseignant ou par le biais d'un texte écrit (comme dans la figure 8);

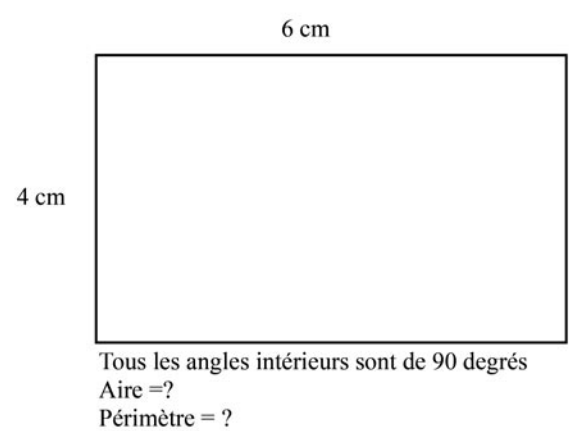


Figure 8. Une question typique.

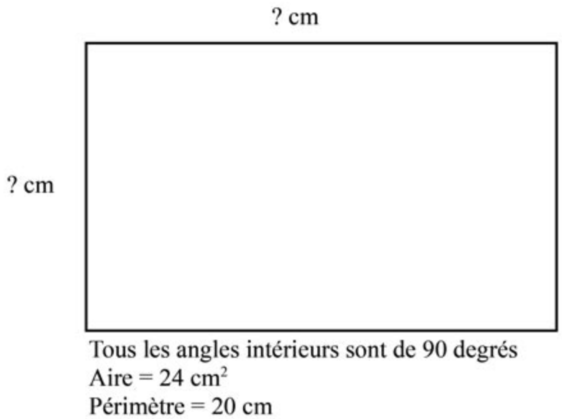


Figure 9. *Une question différente.*

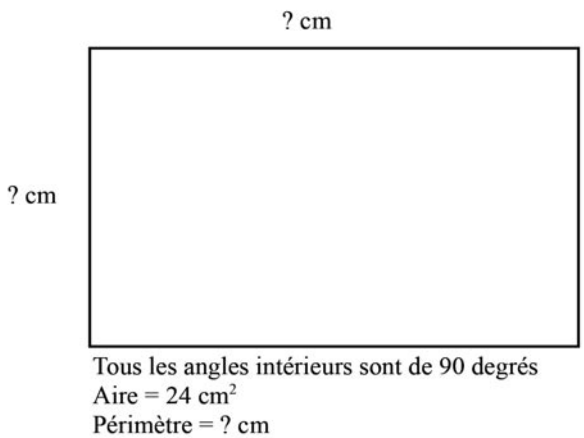


Figure 10. *Que peut-on établir avec certitude?*

- deuxièmement, un élève peut les observer à travers ses sens, par exemple, voir qu'un côté d'un rectangle est plus long qu'un autre, ou que les murs dans le coin d'une pièce forment un angle de plus de 90 degrés;

- troisièmement, les élèves peuvent créer leurs propres données, par exemple attribuer à la longueur d'un côté d'un rectangle l'étiquette L, ou encore inventer une équation à résoudre.

Les données sont essentielles pour que des choses deviennent nécessaires. Les données de la Figure 8 comme la longueur des côtés du rectangle auraient cependant elles-mêmes pu être des éléments nécessaires si, par exemple, l'aire et le périmètre avaient été donnés en premier lieu (voir la Figure 9).

Si, comme à la Figure 10, certaines propriétés sont données, mais non suffisantes pour déterminer les longueurs recherchées, d'autres éléments peuvent tout de même être inférés à partir des données présentes. Par exemple, je peux dire que le plus petit périmètre possible est de $4 \times \sqrt{24}$. Le périmètre fait partie du programme de mathématiques et ma conscience peut à ce moment être utilisée pour le travailler.

Certaines propriétés comprises dans le programme sont accessibles par ma conscience et peuvent être dérivées des données présentes.

Bien que les données soient des propriétés, elles relèvent du domaine de la mémoire puisqu'il s'agit de faits supposés plutôt que de certitudes dérivées. En tant que telles, elles ne peuvent pas être retrouvées sans aide et doivent donc être mémorisées pour être accessibles dans le futur (sans avoir besoin d'en être informé à nouveau). Ainsi, bien que le périmètre soit un aspect du programme qui soit nécessaire, un périmètre donné, comme celui de la Figure 9, est un périmètre que je devrais mémoriser. Les propriétés données dans une question mathématique particulière doivent être mémorisées, tandis que d'autres propriétés connexes peuvent être dérivées par la conscience de ces données mémorisées.

Éléments générés—génération de nouvelles possibilités

Bien que l'arbitraire requière une mémorisation pour être retenu, la conscience peut tout de même être utilisée. Cela peut être fait de deux façons. Premièrement, une prise de conscience de certaines propriétés peut être basée sur l'adoption d'une convention. Par exemple, après avoir adopté la convention selon laquelle il y a 360 degrés dans un tour complet et que la mesure du tour est basée sur une échelle linéaire (ces deux éléments étant arbitraires), je peux alors utiliser la conscience que j'ai de la linéarité pour affirmer que *si je divise ceci en deux, alors je divise aussi cela en deux.* Ceci m'amène à pouvoir affirmer avec certitude qu'il y a 180 degrés dans un demi-tour—une certitude établie grâce à la prise de conscience de la convention initialement adoptée.

Mon utilisation du mot « certitude » ici est basée sur la prémisse *si j'adopte cette convention, alors* il y a une propriété que je peux énoncer concernant le demi-tour qui est vrai (et je n'ai pas besoin d'en être informé). Bien sûr, si une convention différente est adoptée, la propriété peut ne plus être vraie. Ayer (1962) donne un exemple tiré de la philosophie:

> Outre le fait qu'elles [les propositions a priori] peuvent être justement considérées comme vraies, ce que les règles linguistiques ne peuvent pas, elles se distinguent aussi par leur nécessité, alors que les règles linguistiques sont arbitraires. En même temps, si elles sont nécessaires, c'est seulement parce que les règles linguistiques pertinentes ont été présupposées. Ainsi, le fait que l'expression « plus tôt » est utilisée en français pour signifier plus tôt est un fait contingent et empirique. C'est aussi une règle de langage arbitraire, et aussi très commode, que les mots qui représentent des relations temporelles soient utilisés de manière transitive. Étant donné cette règle, la proposition selon laquelle, si A est plus tôt que B et B est plus tôt que C, A est plus tôt que C devient une vérité nécessaire. (p. 17)

> For apart from the fact that they [*a priori* propositions] can properly be said to be true, which linguistic rules cannot, they are distinguished also by being necessary, whereas linguistic rules are arbitrary. At the same time, if they are necessary it is only because the relevant linguistic rules are presupposed. Thus, it is a contingent, empirical

> fact that the word « earlier » is used in English to mean earlier, and it is an arbitrary, though convenient, rule of language that words that stand for temporal relations are to be used transitively; but, given this rule, the proposition that, if A is earlier than B and B is earlier than C, A is earlier than C becomes a necessary truth.

Le *si, … alors ce doit être ainsi* est à la base du travail mathématique de l'établissement de nouvelles certitudes—le nécessaire.

La deuxième façon d'utiliser la conscience avec l'arbitraire consiste à être créatif avec les conventions elles-mêmes: *si, alors ce pourrait être ainsi.* Par exemple, considérons les noms des nombres. Les noms utilisés pour représenter les nombres sont arbitraires, il en est de même pour les conventions guidant l'utilisation de ces noms. *Un, deux, trois, cent, mille,* etc., sont arbitraires, car ils peuvent également être *one, two, three, hundred, thousand,* etc. La convention en français veut que 21 soit dit en référant en premier au chiffre représentant la plus grande valeur—alors qu'en allemand c'est le contraire, on commence avec le chiffre représentant la plus faible valeur en premier—*ein-und-zwanzig.* Ainsi, la manière dont les mots sont combinés est également arbitraire. Cependant, après avoir adopté les noms et les conventions en anglais, je peux utiliser ma conscience pour générer de nouveaux noms pour les nombres. Par exemple, dites le nombre suivant à voix haute:

4280381

Vous n'avez probablement jamais entendu ou prononcé à voix haute ce nombre auparavant dans votre vie. Par conséquent, vous ne pouvez pas avoir mémorisé comment le dire. La capacité de générer de nouveaux noms pour les nombres à partir des conventions adoptées fait partie du domaine de la conscience. Pourtant, ces noms ne sont pas nécessaires, car ils ne sont encore que des noms. Je nomme de telles choses des *éléments générées.* Ces choses ont été générées à partir de la conscience des noms et des conventions. La question du « vrai » ou du « faux » n'est pas appropriée, car d'autres possibilités existent; la question est plutôt de savoir si ces alternatives sont acceptées au sein d'une culture donnée. Ce qui a été accepté dans le passé, par exemple le mot « billion » comme signifiant 1 000 000 000 000 au Royaume-Uni, peut évoluer avec le temps. En effet, « billion » en anglais signifie aujourd'hui 1 000 000 000.

Tout comme la conscience peut être utilisée pour travailler avec les conventions afin de produire des noms n'ayant jamais été énoncés pour des nombres, certaines conventions peuvent être explorées à des extrêmes qui ne sont généralement pas appliqués dans une culture. Par exemple, un enfant qui prononce les noms suivants: *cent, deux cent, trois cents,* peut continuer et dire: *huit cent, neuf cent, dix cent, onze cents.* Il n'y a rien de « faux » là-dedans et j'ai déjà entendu un tel usage à la télévision et à la radio (il est courant de le faire en parlant d'années, par exemple dix-neuf cent quatre-vingt-dix-neuf). On peut cependant pousser l'exploration plus loin: deux cent quarante-sept cents pour 24 700; ou vingt-trois virgule quatre dizaines pour 2,34. Celles-ci ne sont pas des formulations entendues à la radio, mais pourtant, elles ne font qu'explorer une convention acceptée, plus loin qu'elle ne l'est usuellement. Pédagogiquement, cette exploration a ses utilités. En effet, il peut être utile de faire preuve de souplesse en ce qui concerne les façons de visualiser et de nommer les nombres.

Les conventions peuvent également être étendues: par exemple, la notation des coordonnées bidimensionnelles peut être étendue à trois, quatre dimensions ou plus, et offre ainsi un moyen de travailler avec des scénarios autrement plus complexes sur le plan conceptuel. Les conventions peuvent également être combinées, telles que l'écriture $\frac{1}{2}(3, 4)$ pour représenter $(1\frac{1}{2}, 2)$. Ce sont des façons d'utiliser sa conscience pour générer de nouvelles possibilités dans ce monde de conventions. Toutes ne seront pas acceptées dans la communauté mathématique, mais ce sont des exemples d'utilisation de la conscience dans ce domaine. L'habileté à générer de telles possibilités réduit la demande en mémoire, qui autrement est fortement sollicitée. Borges (1985) a créé un personnage, Funes, qui n'oubliait jamais rien et qui créait un nouveau nom pour chaque nombre. Heureusement pour nous, les exigences en matière de mémoire sont moindres grâce à notre capacité à générer des noms pour les nombres à partir de relativement peu de mots.

Résumé

Un aperçu des dynamiques discutées dans cet article est présenté à la Figure 11. Regarder le programme de mathématiques en termes de ce qui peut être inféré par quelqu'un (nécessaire) et ce dont on doit être informé (arbitraire) peut clarifier les rôles que l'enseignant et les élèves prennent dans l'enseignement et l'apprentissage. Les noms et les conventions sont arbitraires et les étudiants n'ont d'autre choix que de mémoriser l'arbitraire. Un enseignant devra les informer de ce qui est arbitraire. J'ai indiqué à la Figure 11, que l'élève « reçoit » l'arbitraire. La seule autre option est que l'enseignant refuse d'informer l'élève et le laisse inventer quelque chose. C'est parfaitement possible et parfois souhaitable: cela ne change toutefois pas le fait que les étudiants devront un jour ou l'autre en être informés pour faire partie de la communauté mathématique qui communique par le biais de ces conventions adoptées.

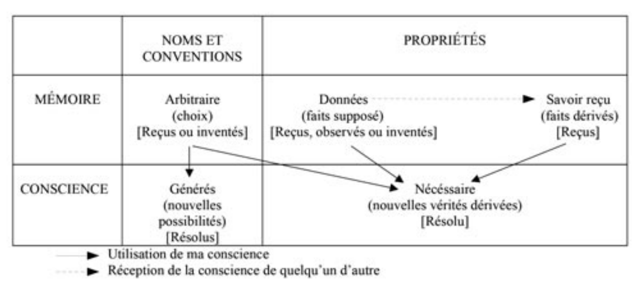


Figure 11. Une vue d'ensemble.

Comme le fait remarquer Mandler (1989) :

> En théorie, comme le dit Humpty Dumpty: « Quand j'utilise un mot, il signifie exactement ce que je choisis qu'il signifie—ni plus ni moins. » Cependant, l'histoire des sciences sociales est parsemée de concepts et de

termes abandonnés qui ont ignoré un corollaire dont Humpty Dumpty ne nous a jamais parlé : Une fois que vous avez assigné une signification (exacte) à un mot, vous devez commencer à convaincre d'autres personnes de l'utiliser de cette façon; sinon, les monologues ne seront jamais remplacés par le dialogue et le consensus (p. 237)

> The good theory can well say with Humpty Dumpty: "When I use a word, it means just what I choose it to mean—neither more or less." However, the history of the social sciences is strewn with abandoned concepts and terms that have failed to heed to corollary that Humpty Dumpty never told us about: Once you choose a word to mean something (exactly), then you have to start convincing other people to use it that same way; otherwise, monologues will never be replaced by dialogue and consensus.

Les élèves sont peu susceptibles de convaincre la communauté mathématique de changer les noms et les conventions déjà établies, et ce même s'ils avaient la plate-forme pour tenter de le faire. C'est donc l'élève qui, peut-être injustement, doit accepter et adopter pour communiquer avec la communauté mathématique.

Le nécessaire concerne les propriétés, et une possibilité pour les élèves consiste à « recevoir» les propriétés par l'intermédiaire d'un enseignant les informant de la même manière que pour l'arbitraire. Toutefois cela transforme le nécessaire en savoir reçu et les élèves pourraient ainsi en venir à le traiter comme une chose de plus à mémoriser. Ils n'auront pas d'autre choix à moins qu'ils ne soient capables et désireux de faire le travail nécessaire pour prendre conscience de la nécessité de ce savoir reçu. Certains élèves seront peut-être en mesure de faire ce travail à partir duquel le savoir reçu deviendra une certitude dérivée et connue par la conscience plutôt que par la mémoire.

Un autre choix qui s'offre à l'enseignant est de fournir une tâche qui rendra les propriétés accessibles par le biais de la conscience. Plutôt que d'informer les élèves de ces propriétés et les laisser trouver pourquoi il doit en être ainsi, une tâche appropriée aidera à ce que ces propriétés deviennent plus accessibles aux élèves par une prise de conscience.

Un enseignant qui choisit délibérément de ne pas informer les élèves de ce qui est nécessaire est conscient que de se développer en tant que mathématicien requiert une éducation de la conscience plutôt qu'une collecte d'informations et leur mémorisation. Cette position clarifie pour les élèves la manière de travailler qui convient à chaque élément du programme—l'arbitraire doit être mémorisé, mais pour ce qui relève du nécessaire, il s'agit d'éduquer leur conscience.

Si je dois me souvenir…, alors je ne fais pas des mathématiques

Notes ajoutées par l'éditeur

[1] Le snooker est une des variantes du billard. Lorsqu'un joueur ne peut atteindre aucune boule directement (sans recourir à la bande), il est dit 'snooké'.

[2] En anglais, *received wisdom.*

[3] Poincaré réfère ici au sens d'un concept mathématique particulier, et il donne pour exemples ceux de la fraction, de la continuité, ou de l'aire d'une surface courbe.

Références

Ayer, A.J. (1962) *Language, Truth and Logic.* London : Victor Gollancz.

Borges, J.L. (1985) Funes, the memorious, in *Fictions* pp. 97-105. London: John Calder.

Clausen, T. (1991) Turning logo, *Micromath* **7**(1), 16.

Gattegno, C. (1987) *The Science of Education: Part 1 – Theoretical Considerations* New York: Educational Solutions.

Ginsburg, H. (1977) *Children's Arithmetic: the Learning Process.* New York: van Nostrand.

Kripke, S. (1996) *Naming and Necessity.* Oxford: Basil Blackwell

Mandler, G. (1989) Affect and learning: reflections and prospects, In McLeod, D.B & Adams, V.M. (Eds.) *Affect and Mathematical Problem Solving:·A New Perspective* (pp. 237-244). New York: Springer-Verlag,

Merttens, R. (1995) Teaching not learning: listening to parents and empowering students, *For the Learning of Mathematics* **15**(3), 2-9.

Nozick, R. (1984) *Philosophical Explanations,* Oxford: Clarendon Press

Pimm, D. (1995) *Symbols and Meanings in School Mathematics.* London: Routledge.

Poincaré, H. (1920) *Science et Méthode.* Paris: Ernest Flammarion.