INTRODUCTION À L'ALGÈBRE PAR LA GÉNÉRALISATION : PROBLÈMES DIDACTIQUES SOULEVÉS

GUSTAVO BARALLOBRES

Une caractéristique des objets mathématiques c'est qu'ils ne sont ni palpables ni directement percevables : ce sont des objets *généraux*. Ils ne deviennent objets de connaissance qu'à l'intérieur d'une activité humaine, médiatisée par des symboles, des artefacts (règles, calculatrices) et des dispositifs linguistiques, activité située elle-même dans un contexte culturel (Radford, 2002, 2004a).

Puisque cet objet n'est saisi par l'élève que progressivement, à travers un processus d'interprétation et de significations attribuées à cet objet, l'action du sujet se voit orientée continuellement par des significations « locales » On voit se dessiner ici l'un des problèmes majeurs liés à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, à savoir celui du rapport entre ces significations locales et les significations culturelles. Ce rapport s'exprime de différentes manières : rapport entre connaissances et savoirs, dans le cadre de la didactique des mathématiques (Conne, 1992; Brousseau, 1998); processus dialogique à travers lequel les significations privées sont sans cesse modifiées et raffinées pour converger éventuellement vers les significations conven- tionnelles établies en mathématiques dans le cadre d'une perspective sémiotique (Sáenz-Ludlow, 2006); ou encore, en termes d'évolution des rapports personnels que l'élève entretient avec les objets de savoir, de façon à ce qu'ils deviennent plus conformes, plus idoines au rapport institutionnel (Chevallard, 1989).

Les approches socioculturelles défendent l'idée que ce rapport entre significations locales (ou personnelles) et les significations culturelles ne sont pas naturelles. Ce rapport ne peut pas s'expliquer en particulier en simples termes d'adaptation et accommodation Justement, un des rôles épistémiques de la culture est d'insinuer – à travers les catégories conceptuelles et les pratiques sociales qu'elle met à la disposition de ses individus – des lignes de développement conceptuel (Radford, 2006a). À la base de ce rapport se trouvent les processus d'intériorisation qui ne sont pas une simple « copie » des contenus externes à l'intérieur d'une conscience; ces processus sont créateurs de cet espace interne (Baquero, 1997; Leontiev, 1984) Le rapport de l'externe à l'interne exige une réorganisation individuelle qui s'oppose à une transformation automatique des outils donnés par la culture. Ces outils ne peuvent pas avoir un rôle dans l'action des sujets, s'ils ne sont pas saisis par des sujets concrets qui agissent dans des situations spécifiques. Du point de vue épistémologique, il y a une tension constitutive des interactions, entre les normes du système culturel à s'approprier et l'activité individuelle des sujets à l'intérieur de ce système, activité qui ne peut être ni substituée ni éliminée (Castorina, 1996).

Notre objectif est d'explorer cette tension dans le contexte de l'introduction à l'algèbre par la généralisation. Plusieurs chercheurs se sont intéressés aux activités de généralisation de patterns, dans le cadre de la perspective de généralisation sur l'entrée en algèbre (Radford, 1999, 2002, 2003a, 2003b, 2004; Radford *et al*, 2006; Mason, 1996; Lee, 1996). D'abord, nous analyserons certaines difficultés concernant les significations des expressions algébriques produites dans le contexte d'introduction à l'algèbre – les expressions algébriques en tant qu'expression symbolique – à la lumière des possibilités d'action que les activités de patterns portent. Ensuite, nous faisons appel à la notion de situation didactique (Brousseau, 1998), afin d'étudier *les conditions didactiques* qui pourraient favoriser la mise en jeu d'autres significations relatives aux expressions algébriques – les expressions algébriques en tant qu'outil de calcul – c'est-à-dire, des autres rôles de ces objets mathématiques dans des décisions d'action à l'intérieur d'une situation spécifique. L'intention d'étudier le rapport entre l'activité individuelle de sujets et les normes du système culturel justifie l'appel à la notion de « situation didactique ». En effet, une des caractéristiques fondamentales des situations didactiques est celle qui consiste à souligner l'intentionnalité de communication des savoirs culturels. En partant des connaissances sous forme de texte de savoir, la théorie de situations cherche les conditions dans lesquelles ces savoirs pourraient jouer un rôle dans l'action des sujets. Les situations deviennent alors supports, cadres et moteurs des apprentissages (Conne, Favre et Giroux, 2005).

Les patterns et la question du sens des expressions symboliques associées

Dans un travail sur la généralisation dans le contexte de patterns, Radford (2003b) montre que deux expressions symboliques pour un même pattern («$(n + 1) + n$» et « $(n + n) + 1$ ») sont jugées différentes par les élèves, parce que ces expressions expriment un ensemble d'actions différentes. Dans chaque expression, les symboles n, 1, +, (,), ne sont pas liés de manière arbitraire Le signifié sémiotique de l'objectivation des actions « évoquées » dans les expressions algébriques reste lié à l'ordre de la séquence des actions numériques. Ces expressions symboliques héritent de la dimension spatio-temporelle du discours contextuel qui empêche la réalisation de calculs formels

Nous trouvons que cet héritage n'est pas étranger à la fonction d'expression que l'outil algébrique acquiert dans le contexte des situations d'écriture du terme général de patterns. À notre avis, ce n'est pas seulement la dimension spatio-temporelle du discours contextuel qui empêche la réalisation de calculs formels : il n'y a aucun objectif dans la situation qui permettrait d'orienter une activité de réalisation de ces calculs. Les expressions algébriques $(n + 1) + n$ et $(n + n) + 1$ expriment pour les sujets une différence qui n'a pas d'incidence du point de vue numérique. En d'autres termes, la distinction entre sens et dénotation, dans le sens de Fregue (cité par Arzarello *et al.*, 2001) n'est pas l'enjeu d'une situation d'expression d'un terme général d'un pattern.

Dans le cadre d'une situation expérimentale, nous avons proposé aux élèves qui débutaient en algèbre l'activité suivante : pour quelles valeurs de a et b (nombres entiers) l'expression algébrique $b+3a + 2b$ représente des multiples de 3? La première réponse de la plupart des élèves a été la suivante : « a peut être n'importe quel nombre entier (il est multiplié par 3) et b doit être un multiple de 3 ». Un élève a renversé l'orientation de la situation. Il a utilisé la calculatrice et a découvert que d'autres valeurs de b produisent des multiples de 3. L'enjeu numérique de la situation a été une « voie » pour questionner une première « lecture » spatio-temporelle de la formule et ainsi ouvrir un espace à la transformation de l'écriture originale dans une écriture équivalente : $3a + 3b$. Du coup, cette dernière écriture met en évidence ce que les essais numériques avaient annoncé. La transformation formelle des écritures économise le travail et réaffirme - valide, pour un observateur externe - ce que l'expérimentation avait déjà avancé

Nous ne prétendons pas remettre en question les activités de patterns, nous voulons simplement souligner le fait que cette activité mathématique ne porte pas un objectif en soi : par exemple, on trouve le terme général d'une série numérique pour étudier sa convergence. Alors, dès que l'expression du terme général est produite, on a des choses « à faire » avec cette expression algébrique (un nouvel objectif qui commande une nouvelle activité). Nous ne remettons pas non plus en question l'analyse faite par Radford. Nous avançons seulement l'idée que si l'on accepte que la signification d'une expression algébrique (d'un objet) est en lien avec « ce que l'on a fait » avec ladite expression, dans le contexte de l'écriture du terme général d'un pattern, il serait raisonnable que les expressions restent attachées au contexte de production

Quelles sont les conditions didactiques qui favoriseraient l'évolution des élèves des niveaux de généralisations factuelles ou contextuelles (dans le sens de Radford, 2004) à des généralisations algébriques? Nous faisons l'hypothèse qu'un travail sur la validation des formules modélisantes pourrait constituer un espace didactique à l'intérieur duquel l'outil algébrique dépasserait leur caractère d'expression symbolique, ouvrant ainsi le chemin à l'analyse syntaxique. Cet espace est pour nous un outil méthodologique pour l'observation des interactions de connaissances, de la tension entre l'activité des sujets et l'intentionnalité qui porte la situation didactique (enseignement d'objets de savoirs donnés par la culture). Mais pourquoi l'entrée dans une pratique de validation serait-elle favorable à la construction de l'espace didactique dont nous venons de parler?

Validation de connaissances en situation

Balacheff (1987) distingue les validations pragmatiques, fondées sur l'action effective mise en œuvre sur des représentations d'objets mathématiques et les validations intellectuelles, détachées de l'action et inscrites dans des conduites langagières exprimant les objets et leurs propriétés, en calculant leurs relations. Les validations intellectuelles exigent un changement de position : le locuteur doit se distancer de l'action et du processus effectif de résolution du problème. La connaissance, qui jusqu'ici a été un moyen d'action, devient l'objet de réflexion, de discours et de débat. Un élément important durant cette étape est le développement d'un langage fonctionnel qui ne soit pas seulement un moyen de description des actions ou des opérations, mais un véritable outil de calcul intellectuel

C'est dans ce sens que nous pensons que l'entrée dans des pratiques de validation intellectuelle serait favorable à la création d'un espace didactique, dans lequel la signification « locale » de l'outil algébrique dépasserait leur caractère d'expression symbolique. Cependant, l'entrée des élèves dans une pratique de validation intellectuelle n'est pas évidente. Les pratiques de validation ne sont pas une donnée immanente de l'esprit humain (Legrand, 1988). Elles sont le produit du développement des mathématiques en tant qu'activité humaine, réalisée dans des contextes historiques et culturels particuliers. Du point de vue de l'enseignement, nous devons explorer, encore une fois, la pratique personnelle de validation que la situation convoque à l'intérieur d'une pratique culturelle récréée dans l'école. C'est dans une interaction dialectique entre les sujets et l'environnement, créée artificiellement par l'école, que les élèves peuvent accéder à la compréhension du fonctionnement de la validation en mathématiques. En nous appuyant sur Radford (2000, 2006a), nous affirmons que cet environnement n'est pas construit pour « aider » les reconceptualisations du sujet : il constitue le lieu de rencontre des rationalités individuelles et de celles qui émergent de confrontations épistémologiques à l'intérieur des communautés scientifiques

Lorsque nous parlons de validation intellectuelle dans les classes de mathématiques, nous ne nous référerons pas seulement à la démonstration; au contraire, nous tenons compte de ce processus complexe d'allers-retours, d'intuitions, de doutes et de méfiances qui caractérisent le développement de la pensée mathématique. Les différents courants en didactique des mathématiques ne parviennent pas à un consensus sur la manière d'articuler les liens qui existent entre la rationalité des sujets en situation d'apprentissage et la rationalité mathématique ciblée. Nous la traiterons en utilisant certains éléments de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et en ne considérant qu'une des composantes « locales » de ces pratiques institutionnelles : la situation didactique. Dans ce contexte local, le professeur, en tant que représentant de la communauté des mathématiciens dans la classe, est un acteur fondamental du processus d'élaboration des pratiques de validation. D'après nous, le professeur n'est pas un guide qui « aide » les élèves dans ces reconstructions conceptuelles individuelles, il est fondamentalement un acteur culturel, un communicateur de savoirs et de pratiques, dans le cadre d'un processus complexe de conversion savoirs/connaissances, continuellement à l'oeuvre dans les situations didactiques (Rouchier, 1996) C'est dans ce contexte que nous interpréterons l'action de l'enseignant et les productions des élèves.

Transformation de sens des expressions symboliques dans le contexte de la validation – pistes de travail

Dans un travail antérieur (Barallobres, 2004), nous avons analysé, avec l'appui d'études épistémologiques et didactiques, certaines fonctions de la validation sur le plan local d'une situation. Nous avons avancé, au début des apprentissages algébriques, qu'un travail sur l'explication du caractère vrai de la connaissance produite (sur le « pourquoi » de la vérité et pas seulement sur la détermination de ladite vérité) favorise l'entrée des élèves dans un jeu de validation intellectuelle, à l'intérieur duquel la fonctionnalité de l'algèbre dépasse celle d'outil d'expression

Nous analyserons maintenant une autre situation didactique, construite dans le cadre de notre thèse doctorale (Barallobres, 2006). Nous présenterons la situation, une synthèse de son analyse *a priori* et certaines différences avec les situations de généralisation dans le contexte de patterns Nous analyserons ensuite un épisode du travail des élèves porteur de pistes de recherches intéressantes L'étude dont il est question ici a été réalisée dans une classe de secondaire 2 (élèves de 13-14 ans), au début de l'enseignement de l'algèbre En secondaire 1, les élèves avaient fait certaines activités préparatoires sur les suites numériques (quand ils devaient trouver par exemple le terme général et calculer certaines valeurs de la suite)

La situation [1]

La première étape comporte deux jeux Le professeur invite d'abord les élèves à former des équipes de 4 ou 5 élèves, puis informe les élèves que l'équipe gagnante sera celle qui parviendra à trouver la somme des 10 nombres consécutifs qu'il écrit au tableau. Pour le premier jeu, le professeur propose les nombres : 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28; pour le second jeu, il propose les nombres : 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792.

Deuxième étape : Le professeur propose aux élèves un temps de réflexion avant de continuer le jeu. Les élèves doivent penser à un moyen pour trouver la réponse le plus vite possible, quels que soient les nombres proposés par le professeur

Ensuite, le jeu recommence avec des séries de nombres plus grands qu'à la première étape, par exemple, des séries commençant par 287563 ou 6432987.

Troisième étape : Le professeur demande d'abord aux élèves de chercher les raisons qui permettent d'expliquer pourquoi, la méthode trouvée fonctionne pour toutes les séries de 10 nombres naturels consécutifs, et ensuite d'écrire une formule associée à la méthode proposée. Un bilan des méthodes est réalisé et chaque équipe est invitée à présenter le résultat de son travail.

Dans les situations de généralisation dans le contexte de patterns, les élèves se centrent sur les rapports entre certains termes de la séquence (en général des termes consécutifs, Radford, 2002) afin d'identifier la façon de passer d'un terme au suivant. Les actions impliquées dans ce passage ne se rapportent pas aux relations numériques (du moins, au début) Dans notre exemple, le problème est posé directement dans un contexte numérique et, en obligeant l'élève à calculer rapidement la somme des nombres de la série donnée, les actions se concentrent dès le début sur la manière de réaliser ce calcul, sur des relations numériques qui l'optimisent. La demande d'une formule pour n'importe quelle série de 10 nombres consécutifs exige l'identification d'une invariance numérique, dont les aspects temporels et spatiaux ne sont pas nécessairement prépondérants La formule n'est pas un moyen d'expression, elle est un outil de calcul. La variable didactique « temps » favorise des changements de stratégies chez les élèves, permettant l'élaboration de stratégies chaque fois plus raffinées, chacune réduisant le temps de réalisation des calculs. Notons que la façon dont nous faisons intervenir la variable « temps » vient se rallier à la variable « efficacité » du calcul, variable qui a joué, d'après Radford (2006b), un rôle clé dans l'émergence de l'algèbre symbolique à la Renaissance.

Dans la version informatique les stratégies des élèves ont une validation empirique immédiate (dans la version papier-crayon, il faut attendre le bilan des résultats), ce qui permet un jeu d'action-rétroaction très dynamique qui enrichit le milieu d'action des élèves. Nous faisons l'hypothèse que le fait de nous centrer sur la formule en tant qu'outil de calcul, et pas en tant que moyen d'expression, permet de donner du sens à l'équivalence de deux expressions algébriques qui, au départ, objectivent un ensemble d'actions « différentes ». La dimension « expression » de la formule se voit, elle-même, modifiée. L'évaluation numérique de deux formules qui « semblent » différentes - par exemple $(n + 1) + n$ et $(n + n) + 1$ - ouvre la voie au travail sur les transformations d'écritures. Ces transformations, dans le contexte d'équivalences numériques, exigent de regarder le rapport entre les symboles en termes de relations numériques.

Le travail des élèves

En général, nous avons retrouvé les mêmes types de problèmes que ceux identifiés par Radford, en ce qui concerne l'héritage de la dimension spatio-temporelle du discours contextuel dans les expressions algébriques produites par les élèves, même avec une situation différente et en considérant la problématique de la validation des connaissances produites. Par exemple, une des formules proposées par les élèves a été $10n + 45$, n étant le premier nombre de la série. Certains élèves arrivent à cette formule en identifiant le rapport entre le premier nombre de la série et chacun des autres nombres : n; $n + 1$; $n + 2$; ..... $n + 9$. Le nombre 10 est lié à la quantité de nombres dans la série et le 45 est le résultat de $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9$, ce dernier étant une valeur constante pour n'importe quelle série Afin de nous confronter aux résultats de Radford, nous avons demandé aux élèves – après avoir validé la formule mentionnée – d'analyser et de valider d'autres formules, par exemple :

a $10(n + 2) + 25$

b. $10(n + 9) - 45$

c. $12n + 20 - 2n + 25$

Dans les deux premiers cas, les élèves cherchent à associer des actions « similaires » à celles qui ont été à la base de la formule $10n + 45$. Pour la formule a), les élèves associent le « 10 » à la quantité de nombres de la série et le produit $10(n + 2)$ à l'addition répétée du 3ème terme. Dans un processus d'interactions où le professeur a joué un rôle fondamental, les élèves déterminent la validité de la formule a). Un travail similaire est effectué pour la deuxième formule. Pourtant, aucune évaluation numérique des deux premières formules n'a été réalisée. Aucune analyse comparative en termes des relations numériques impliquées (transformations d'écritures visant à montrer l'équivalence) n'a été produite. Dans les deux cas, les élèves ont pu valider la formule « en ajoutant » un contexte de production.

Le cas de la formule c) a été différent : les élèves, ne pouvant retrouver dans l'expression produite aucune « trace » d'actions possibles, « similaires » à celles qui ont été trouvées dans les cas précédents, affirment de manière assez catégorique leur invalidité. L'élève 1 dit : « C'est impossible! 12n, c'est impossible. Il y a 10 termes dans la série, ça n'a pas de sens! ». Une rupture assez marquée avec le contexte de production empêche les élèves d'attribuer une signification à la formule donnée. L'évaluation numérique est absente dans l'analyse des élèves : l'entrée dans le jeu syntaxique semblerait ne pas avoir de signification.

Un épisode dans une classe nous permet de regarder cette problématique sous un angle différent. Une stratégie assez particulière est produite par un groupe d'élèves : elle consiste à « mettre un 5 à la fin du cinquième nombre de la série » (par exemple, pour la série 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, les élèves prennent le 23 et proposent 235 comme résultat). Les autres stratégies dans cette classe conduisent la majorité des équipes à la formule $10n + 45$. C'est cette dernière expression qui est « acceptée » d'emblée par la classe. Même si la généralisation et la validation ne se produisent pas sans difficultés, nous ne nous occuperons pas de ce qui pourrait se placer encore dans le cadre des généralisations contextuelles (Radford, 2004), puisque l'explication de la véracité de la formule trouve ses sources dans le contexte de la production de formule même.

Le cas de la première méthode est différent. Le groupe qui a produit cette méthode déclare avoir « observé » les différentes séries proposées par le professeur et les résultats des sommes : « Tous ces résultats finissaient par 5 et la première partie du résultat coïncidait toujours avec le cinquième nombre de la série ». Par exemple, dans la série 519, 520, 521, 522, 523, 524 ... 528, la somme est 5235. Le résultat se termine par le chiffre 5 et si on enlève ce chiffre, on obtient le cinquième nombre de la série proposée (523). Dans l'étape d'action, une validation empirique de la méthode par induction est suffisante (pratique individuelle des élèves). Dans l'étape de validation, la demande explicite d'une explication (conditions de la situation), ainsi que la confrontation des pratiques individuelles avec les outils culturels apportés par le professeur (communication de pratiques de validation) favorise une évolution, qu'on peut voir dans l'extrait suivant (ci-dessous, E1, E2 et E3 désignent les élèves du groupe qui ont proposé la deuxième stratégie; Es désigne plusieurs élèves et P le professeur; la validation publique s'effectue après la validation de 10n + 45) :

E1 : On travaille avec 15.

P : (écrit au tableau) 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24

E1 : On ajoute « 4 » au premier nombre et après on met 5 en arrière, ... au lieu d'ajouter le 4 à la fin, on a monté dans la série 4 nombres et on ajoute un 5.

Es : On ne comprend rien.

E2 : Oui, parce que le cinquième nombre a déjà le « 4 » ajouté, parce que la première méthode est « fois 10 » et après plus 45.

P : J'écris l'autre méthode pour vous faire rappeler : le premier nombre × 10 plus 45, dans notre exemple, 15 × 10 + 45.

E2 : Le 19 est le cinquième nombre et il a déjà le « 4 » ajouté (19 = 15 + 4), le « 4 » du 45. Alors, il reste juste le 5 mais comme on multiplie par 10, on met juste le 5 en arrière et c'est fini

P : (à la classe) Qu'est-ce que vous dites?

E4 : Non, c'est pas comme ça ... je [ne] comprends rien ... pourquoi on met un 5?

E2 : C'est comme .. le premier, on multiplie par 10 avec un 4 de plus ... si on multiplie le premier nombre par 10, on ajoute 40 ... C'est pareil d'aller du premier au cinquième, et là on additionne 5, mais parce que 40 + 5 fait 45. En ajoutant 40, on tombe sur le cinquième avec un zéro en arrière ...

P : Comprenez-vous ce qu'il explique? (silence)

P : Beh! ... Il faut mieux expliquer parce qu'ils ne comprennent pas ...

E3 : C'est la même chose que de multiplier par 10, parce qu'on laisse un espace et après on ajoute un 5 .

P : E3 dit que lorsqu'on multiplie par 10, on laisse un espace ... en réalité on met un zéro, n'est-ce pas? (silence)

E3 : C'est la même chose... on laisse un espace... donc « plus 45 » va te donner toujours un « 5 » en arrière et après on additionne le 4...

P : E3 dit que lorsqu'on multiplie par 10, on a 150.

Comme on aura toujours un zéro en arrière du nombre, on aura aussi un « 5 » en arrière du résultat, parce qu'on ajoute 45 Comment continuez-vous l'explication?

E3 : Après, tu additionnes le 40, 4 dizaines du 45 …

P : E3 dit que lorsqu'on multiplie le premier nombre par 10, on a, à la fin, un 0 …

E3 : Et lorsque tu additionnes 45, il y aura toujours un « 5 » en arrière. Lorsqu'on additionne 40, le 4 est toujours à la place des dizaines; alors, on obtient la même valeur en additionnant « 4 » aux unités du premier nombre de la série, obtenant toujours le cinquième nombre de la série. Alors, c'est pour cela que d'abord on additionne 4, on arrive au cinquième nombre de la série. Mais en réalité on additionne 40

P : Pourquoi tu prends le cinquième nombre de la série et non pas le quatrième ou le sixième?

E2 : Parce que dans le sixième tu as additionné 5 au premier, et il faut additionner 45 et pas 55! Pour le quatrième, tu as additionné 3 et non pas 4. Si on doit additionner 45, on doit avancer toujours 4 nombres dans la série.

Les élèves de ce groupe valident leur production en établissant une équivalence avec la stratégie $10 \times 15 + 45$, déjà validée par la classe. En partant de la validité de la formule $10 \times 15 + 45$, ils établissent des relations numériques entre les deux méthodes produites. La recherche de l'équivalence (commandée par le besoin de produire une explication) fonctionne comme un moteur pour la réinterprétation des deux méthodes : « prendre le cinquième » peut maintenant être interprété en termes de « le premier nombre plus 4 », ensuite, « le premier nombre plus 4 et le résultat fois 10 »; « mettre un 5 à la fin » conduit les élèves à proposer l'équivalence $10n + 45 = 10n + 40 + 5$ et ensuite, l'équivalence entre $10n + 40$ et « le cinquième nombre fois 10 ».

On pourrait dire que l'équivalence établie est encore « partiellement » contextuelle : on exprime $10n + 45$ comme $10n + 40 + 5$, et non pas comme $10n + 20 + 25$, puisque l'on cherche sur la formule $10n + 45$ les traces des actions à la base de l'autre méthode, mais c'est justement cela que l'on fait du point de vue syntaxique! On ne fait pas des transformations arbitraires, on anticipe et l'on transforme avec un objectif. À la place de chercher les traces des actions de production dans le contexte original, on les cherche dans la formule déjà validée, ce qui permet d'identifier de nouvelles relations. Ces nouvelles relations sont à la base des équivalences syntaxiques. La communication de certains éléments d'une pratique culturelle de validation par le professeur, dans le contexte spécifique de la situation (impossibilité de validation contextuelle), favorise le travail sur les équivalences

Le travail d'écriture encouragé et soutenu par l'action du professeur (autre savoir culturel apporté) a été un outil de médiation fondamental. Les relations identifiées oralement par les élèves ont été représentées par les expressions numériques suivantes :

$$10 \times 15 + 45 = 10 \times 15 + 40 + 5 = 10 \times 15 + 4 \times 10 + 5 = (15 + 4) \times 10 + 5$$

Les remarques du professeur au sujet de certains « implicites » ont été aussi un outil de médiation important : « voilà pourquoi, c'est important que tu exprimes ta méthode en fonction du premier nombre » (la première formule avec laquelle se réalise la comparaison est exprimée en fonction du premier nombre de la série); etc. Ici, les élèves se retrouvent avec une méthode (mettre un 5 à la fin du cinquième nombre) pour laquelle les actions associées dans l'étape de production ne peuvent pas fonctionner comme contexte pour la validation, mais le cas est différent de celui de la formule $12n + 20 - 2n + 25$. D'abord, parce que la formule en question a maintenant déjà été validée empiriquement dans l'action (évaluation numérique); ensuite, la formule a été produite par une des équipes (la formule objective un ensemble d'actions produites par les élèves eux-mêmes); finalement, parce que les actions originales ont pu être réinterprétées dans le contexte d'un autre ensemble d'actions déjà validées. Un travail postérieur sur la généralité des formules produites a été au centre de la rencontre entre les rationalités individuelles et celle de la pratique culturelle de référence

Conclusions

Notre travail se veut une prolongation de certaines études sur la généralisation en algèbre (Radford, 2002, 2003a, 2003b, 2004a), en nous appuyant sur ces résultats, mais en soulignant la spécificité des situations proposées aux élèves et les liens entre ces situations et l'activité algébrique émergente.

Afin d'expliquer pourquoi un élève adopterait un nouveau signifié résultant de la manipulation algébrique, en suspendant le signifié lié au monde de référence, Balacheff (2001) fait appel à un certain sens d'économie de la pratique. Ce sens est limité dans situations de « patterns » analysées par Radford et rencontrées dans les manuels scolaires. En effet, alors que Radford et d'autres chercheurs ont étudié les problèmes liés à l'élaboration d'une formule du terme général d'une séquence $a_1, a_2, a_3, \ldots$, nous avons étudié l'élaboration de la formule $f(n)=\sum_{k=n}^{n+9} k$

La situation que nous avons proposée et, en particulier, l'épisode sur la validation que nous avons analysée, nous renseigne sur des conditions didactiques de réalisation de ce « sens » d'économie. La formule produite acquiert du sens dans le contexte du jeu et la transformation de la formule, dans le contexte de la validation. L'impossibilité de valider une des formules produites, en référence au contexte de production, exige de la part des élèves de chercher ailleurs. L'existence d'une référence (une formule déjà validée), d'un objectif « commandant » le type de relations à établir favorise l'établissement de relations : les élèves essayent d'exprimer le cinquième nombre de la série en fonction du premier nombre (et non pas du troisième ou du sixième) de la série, puisque dans la formule de référence ($10n + 45$), « n » représente le premier nombre. Nous rencontrons ici une des conditions identifiées par Boero :

> The process of [algebraic] transformation needs specific prerequisites and skills. In the case of transformation after formalisation, a crucial prerequisite is the mastery of standard patterns of transformation

> A common ingredient to all processes of transformation (without, before and/or after formalisation) is *anticipation* In order to direct the transformation in an efficient way, the subject needs to foresee some aspects of the final shape of the object to be transformed related to the goal to be reached, and some possibilities of transformation (Boero, 2001, p 99)

L'analyse de notre exemple nous permet d'affirmer, toujours à titre d'hypothèse, que le « dégagement » du contexte de référence, auquel Arzarello *et al* (2001) fait référence, est un processus qui engage l'établissement de nouvelles relations contextuelles, l'implication des aspects numériques. Il ne s'agit pas de « libérer » le symbolisme des attaches narratives (Radford, 2003a), il s'agit plutôt de les re-signifier avec d'autres contenus « narratifs » (plus numériques, plus relationnels) interprétables sur le plan syntaxique

La situation analysée a néanmoins ses limites. En effet, l'événement qui nous intéresse le plus est contingent - la formule « mettre un 5 à la fin du cinquième nombre de la série » peut être produite ou pas - puis, la problématique de l'équivalence (transformation d'expressions algébriques) n'est pas nécessairement l'enjeu fondamental de la situation Pourtant, l'objectif de notre travail n'a pas été de montrer les « avantages » de la situation, mais plutôt d'explorer de nouvelles pistes pour donner du sens au travail algébrique La situation nous a permis de créer cet espace méthodologique d'exploration, en nous amenant à poser de nouvelles questions : comment aider les élèves à se dégager du contexte de référence sans produire une rupture qui laisse les élèves dépourvus de signification? et comment re-signifier les expressions algébriques produites avec d'autres contenus « narratifs » interprétables sur le plan syntaxique?

Remerciement

J'aimerais remercier les deux arbitres de leurs commentaires et suggestions à une version préalable de cet article.

Notes

[1] Cette version a été postérieurement modifiée et transformée dans un jeu à l'ordinateur Ce jeu est présenté sur le site du GRICEA suivant : www gricea umontreal ca/didactic/suites. Il prend appui sur la situation déjà analysée Les élèves verront défiler à l'écran, de haut en bas, une suite de nombres consécutifs Ils devront inscrire la somme de ces nombres le plus rapidement possible, avant que la suite ne parvienne au bas de l'écran S'ils réussissent, le bloc qui porte la série disparaît; dans le cas contraire, la réponse correcte est donnée et le bloc reste dans la partie inférieure de l'écran, ce qui réduit le temps pour les séries suivantes Les élèves peuvent disposer d'une calculatrice pour réaliser les calculs qu'ils jugent nécessaires

Références bibliographiques

Arzarello, F., Bazzini, L. et Chiappini, G. (2001) 'A model for analysing algebraic processes of thinking', dans Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. et Lins, R (dirs.), *Perspectives on School Algebra*, Dordrecht, Kluwer, pp. 61-81.

Balacheff, N. (1987) 'Processus de preuve et situations de validation', *Educational Studies in Mathematics* **18**, 147-176

Balacheff, N (2001) 'Symbolic arithmetic vs algebra The core of a didactical dilemma', dans Sutherland, R, Rojano, T, Bell, A et Lins, R (dirs.), *Perspective on school algebra*, Dordrecht, Kluwer, pp 249-260.

Barallobres, G. (2004) 'La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre', *Recherches en didactiques des mathématiques* **24**(2-3), 285-328

Barallobres, G (2006) *Enseignement introductif de l'algèbre et validation*, Thèse de doctorat, Université de Montréal

Baquero, R (1997) *Vigotsky y el aprendizaje Escolar*, Málaga, Aique grupo editor.

Boero, P (2001) 'Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving', dans Sutherland, R, Rojano, T., Bell, A et Lins, R (dirs), *Perspectives on school algebra*, Dordrecht, Kluwer, pp 99-119.

Brousseau, G (1998) *Théorie de situations*, Grenoble, France, La pensée sauvage

Chevallard, Y. (1989) 'Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège', *Petit X* **5**, 51-94.

Castorina, J (1996) 'El debate Piaget-Vigotsky: la búsqueda de un criterio para su evaluación', dans Castorina, J., Fereiro, E, Kohl de Oliveira, M et Lerner, D (dirs), *Piaget - Vigostky: contribuciones para replantear el debate*, Buenos Aires, Paidos Educador, pp 19-37

Conne, F (1992) 'Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique', dans Brun, J (dir), *Didactique des mathématiques*, Lausanne, Delachaux et Niestlé éditions, pp. 275-338.

Conne, F., Favre, J-M et Giroux, J (2005) 'Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé', dans Doudin, P., Lafortune, L (dirs), *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers*, Québec, Canada, Presses de l'Université de Québec, pp 117-142

Lee, L (1996) 'An initiation into algebraic culture through generalization activities', dans Bednarz, N, Kieran, C et Lee, L (dirs.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, Dordrecht, Kluwer, pp 87-106

Legrand, M. (1988) 'Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique', *Recherches en didactique des mathématiques* **9**(3), 365-406

Leontiev, A (1984) *Activité conscience personnalité*, Moscou, Russie, Éditions du Progrès

Mason, J (1996) 'Expressing generality and roots of algebra', dans Bednarz, N, Kieran, C et Lee, L (dirs), *Approaches to algebra*, Dordrecht, Kluwer, pp. 65-86.

Radford, L (1999) 'El aprendizaje del uso de signos en algebra: una perspectiva post-Vigotskiana', *Educación Matemática* **11**(3), 24-42

Radford, L (2000) 'Sujeto, objeto, cultura y formación del conocimiento', *Educación Matemática* **12**(1), 51-69

Radford, L (2002) 'The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge', *For the learning of mathematics* **22**(2), 14-23

Radford, L. (2003a) 'Narratives expressions algébriques et calcul formel: de la constitution à la transformation du sens', *Annales de didactique et de sciences cognitives* **8**, 191-208

Radford, L (2003b) 'Gestures, speech, and the sprouting of signs: a semiotic-cultural approach to students' types of generalization', *Mathematical Thinking and Learning* **5**(1), 37-70

Radford, L (2004a) 'La généralisation mathématique comme processus sémiotique', dans Arrigo, G. (dir), *Atti del 2004 Convegno di didattica della matematica*, Locarno, Suisse: Alta Scuola Pedagogica, pp 11-27

Radford, L (2004b) *Semiótica cultural y cognición*, Conférence plénière, Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Chiapas, Tuxtla Gutiérrez, México, http://laurentian.ca/educ/lradford/Tuxtla3 pdf

Radford, L (2006a) 'The anthropology of meaning', *Educational Studies in Mathematics* **61**, 39-65

Radford, L (2006b) 'The cultural-epistemological conditions of the emergence of algebraic symbolism', dans Furinghetti, F, Kaijser, S et Tzanakis, C (dirs.), *Proceedings of the 2004 Conference of the International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics & ESU 4 - Revised edition*, Uppsala, Sweden, July 2004, pp 509-524

Radford, L, Bardini, C et Sabena, C (2006) 'Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations', *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), 17-21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain, pp 684-695, http://laurentian.ca/educ/lradford/cerme4.pdf

Rouchier, A. (1996) 'Connaissances et savoirs dans le système didactique', *Recherches en didactique des mathématiques* **16**(2), 177-196

Sáenz-Ludlow, A. (2006) 'Classroom interpreting games with an illustration', *Educational Studies in Mathematics* **61**(1-2), 183-218.